Programme Marocain - BIOF

2BAC

Sc.Économique

ETINCELLE MATHS

Manuel de l'élève

Auteurs

HASSAN KHALKALLAH
Professeur de maths
Cycle secondaire qualifiant
(Coordinateur)

MOHAMED RAHNAOUI
Ex. Inspecteur principal
de l'enseignement secondaire

MOHAMED MOUSSADDAR
Professeur de maths
Cycle secondaire qualifiant

SALAH DIOUA
Professeur de maths
Cycle secondaire qualifiant

LEÇON 1

Continuité d'une fonction numérique

Compétences visées

- Déterminer l'image d'un segment ou d'un intervalle :

- Par une fonction continue.
- Par une fonction continue et strictement monotone.

- Appliquer le théorème des valeurs intermédiaires pour l'étude de quelques équations ou inéquations ou pour l'étude du signe de quelques expressions ... ;
- Utiliser la dichotomie pour déterminer des valeurs approchées des solutions de l'équation $f(x)=\lambda$ ou pour encadrer ces solutions ; Appliquer le théorème des valeurs intermédiaires et le théorème de la fonction réciproque dans le cas d'une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle ;

Prérequis

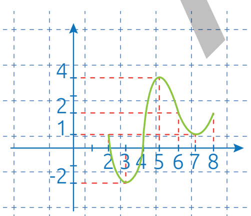
- Limites d'une fonction numérique.
- Monotonie d'une fonction.
- Image d'un intervalle par une fonction.

Prolongements

- Étude de fonctions.
- Suites numériques
- Calcul d'intégral.

JE VÉRIFIE MES ACQUIS

Dans chacun des cas suivants. Indiquer la bonne réponse :

	A	B	C
1 L'équation $6x^2 - 3x - 2 = 0$ admet dans $\mathbb{R}$.	3 solutions ☐	Une seule solution ☐	Deux solutions ☐
2 Si x_1 et x_2 sont les solutions de l'équation $3x^2 + 6x - 4 = 0$ alors :	$3x^2 + 6x - 4 = (x - x_1)(x - x_2)$ ☐	$3x^2 + 6x - 4 = 3(x - x_1)(x - x_2)$ ☐	$3x^2 + 6x - 4 = 3(x + x_1)(x - x_2)$ ☐
3 $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2 - 3}{x + 1}$ est égale à :	$\frac{3}{2}$ ☐	0 ☐	-3 ☐
4 $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 3x + 1}}{2x}$ est égale à :	$\frac{1}{2}$ ☐	$-\infty$ ☐	$-\frac{1}{2}$ ☐
5 Si $f(x) = \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$ pour $x > 1$ et $f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 3x + 2}$ pour $x < 1$ alors :	$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = 0$ ☐	$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = -3$ ☐	$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = -3$ ☐
6 Si $f(x) = \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$ pour $x > 1$ et $f(1) = \frac{1}{2}$ alors :	$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = f(1)$ ☐	$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 1$ ☐	$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$ ☐
7 La courbe ci-dessous représente la fonction f sur $[2, 8]$ 	$f([2, 3]) = [1, -2]$ ☐	$f([2, 3]) = [-2, 0]$ ☐	$f([2, 3]) = [2, 3]$ ☐
	$f([2, 8]) = [1, 2]$ ☐	$f([2, 8]) = [-2, 4]$ ☐	$f([2, 8]) =]-2, 4]$ ☐
Pour x compris entre 2 et 8 l'équation $f(x) = 1$ admet :	Deux solutions ☐	Une seule solution ☐	Trois solutions ☐

1 Continuité en un réel

I • Soit f une fonction numérique d'une variable réelle x définie par : $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x + 3}$.

1 • Déterminer Df .

2 • Vérifier que $\forall x \in Df \quad f(x) = x - 3$.

3 • Calculer $\lim\limits_{x \to (-3)} f(x)$.

4 • Tracer la courbe (Cf) dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

5 • La courbe (Cf) est-elle une ligne continue ou discontinue ? Justifier .

II • On considère la fonction numérique g d'une variable réelle x définie par : $\begin{cases} (\forall x \neq -3)\, g(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x + 3} \\ g(-3) = -6 \end{cases}$

1 • Déterminer Dg .

2 • Vérifier que : $\lim\limits_{x \to (-3)} g(x) = g(-3)$ dans ce cas on dit que la fonction g est continue en -3 .

3 • Tracer la courbe (Cg) dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

4 • La courbe (Cg) est-elle une ligne continue au discontinue ? justifier .

2 Continuité à gauche-Continuité à droite

1 • On considère la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sqrt{x-1} - 1}{x - 2} & \forall x > 2 \\ f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 2x} & \forall x < 2 \ . \\ f(2) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

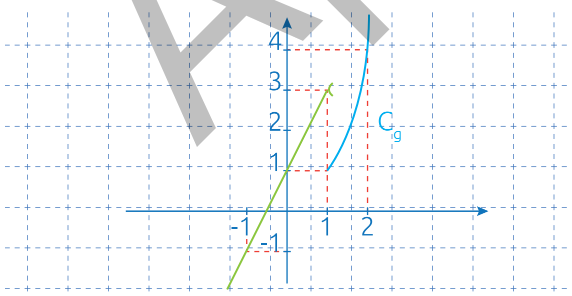
a. Vérifier que : $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} f(x) = f(2)$ on dit que f est continue à droite en 2 .

b. Vérifier que : $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} f(x) = f(2)$ on dit que f est continue à gauche en 2 .

c. En déduire que f est continue en 2 .

2 • Les deux courbes ci-dessous représentent les deux fonctions g et h définies par :

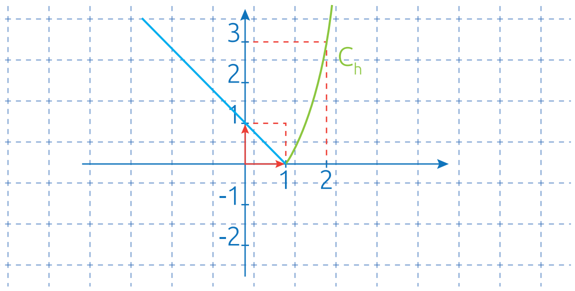
$\begin{cases} g(x) = x^2 & \forall x \geqslant 1 \\ g(x) = 2x + 1 & \forall x < 1 \end{cases}$ et $\begin{cases} h(x) = x^2 - 1 & \forall x > 1 \\ h(x) = 1 - x & \forall x \leq 1 \end{cases}$



a. Calculer $\lim\limits_{x \to 1^+} g(x)$

b. Calculer $\lim\limits_{x \to 1^-} g(x)$

c. g est - elle continue à gauche ou à droite en 1



a. Calculer $\lim\limits_{x \to 1^+} h(x)$

b. Calculer $\lim\limits_{x \to 1^-} h(x)$

c. Montrer que h est continue à droite et à gauche en 1 .

Dans ce cas on dit que h est continue en 1

3 Continuité et opérations.

On dit qu'une fonction f est continue sur un intervalle $[a;b]$; si elle est continue en tout réel x_0 de $]a,b[$ et elle continue à droite en a et à gauche en b .

1 • On considère les deux fonctions u et v définies par : $U(x) = x^2$ et $V(x) = \sqrt{x}$

a. Montrer U est continue sur $\mathbb{R}$.

b. Montrer que V est continue sur $[0, +\infty[$.

2 • Soient f et g deux fonctions définies sur $[a,b]$.

a. Montrer que si f et g sont continues sur $[a;b]$ alors les foncions $f+g$; Cf et $f \times g$ sont aussi continues sur $[a,b]$ avec C un réel constant .

b. Montrer que si f et g sont continues sur $[a,b]$ et que g ne s'annule pas sur $[a,b]$ alors $\frac{f}{g}$ est continue sur $[a,b]$.

4 On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I = [0, +\infty[$ par : $f(x) = x^2 + 2$.

1 • Donner le tableau de variations de f .

2 • Déduire du tableau de variations de f que $f([0; +\infty[) = [2; +\infty[$.

3 • Montrer que l'équation $f(x) = 3$ admet une solution unique b dans $[0, +\infty[$ à déterminer .

4 • Montrer que $f(y) = x$ admet dans $[0, +\infty[$ une seule solution $y = \sqrt{x-2}$

A retenir :

La fonction définie sur $[2, +\infty[$ et notée f^{-1} tel que $f^{-1}(x) = \sqrt{x-2}$ est appelée la fonction réciproque de f

5 Théorème des valeurs intermédiaires

Soit f la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par : $f(x) = x^3 - 3x - 5$.

1 • Montrer que : $f'(x) = 3(x^2 - 1)$ pour tout x de $[1, +\infty[$.

2 • Dresser le tableau de variation de f .

3 • Montrer que l'équation $f(x) = -5$ admet une seule solution $\alpha \in [1, +\infty[$ à déterminer .

4 •

a. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une sur le solution $b \in [1, +\infty[$.

b. Montrer que : $2 < b < 3$.

c. Peut-on déterminer la valeur exacte de b ?

I Continuité d'une fonction numérique en un nombre réel

1. Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle de type $]a-r, a+r[$ $(r > 0)$.

On dit que f est continue en a si et seulement si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Exemple

a. Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}, \ (\forall x \neq 1). \\ f(1) = -2 \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2} \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-2)}$.

Donc : $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x+1}{x-2} \Longrightarrow \lim\limits_{x \to 1} f(x) = \dfrac{2}{-1}$.

Par suite : $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = -2$ et comme $f(1) = -2$

Alors : $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$ donc f est continue en 1.

b. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} g(x) = \dfrac{x-x^2}{2x^2+1} & (x < 0) \\ g(x) = \dfrac{sin(x)}{x} & (x > 0). \\ g(0) = 1 \end{cases}$

- g admet-elle une limite en 0 ?
- g est-elle continue en 0 ?

Vidéo

On a : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \dfrac{x-x^2}{2x^2+x} \Longrightarrow \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \dfrac{x(1-x)}{x(2x+1)}$.

Donc : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \dfrac{1-x}{2x+1} \Longrightarrow \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} g(x) = 1$, et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{sin(x)}{x} \Longrightarrow \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x <> 0}} g(x) = 1$.

Par suite : $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 1$.

- On a : $g(0) = 1$ et $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 1$, donc g est une fonction continue en 0.

II Continuité à droite - continuité à gauche .

1. Continuité à droite - continuité à gauche .

Définition :

1. Soit f une fonction définie sur un intervalle de type $[a; a+r[$ $(r > o)$.

On dit que f est continue à droite en a si et seulement si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = f(a)$.

2. Soit f une fonction définie sur un intervalle de type $]a-r, a]$ $(r > o)$.

On dit que f est continue à gauche en a si et seulement si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = f(a)$.

REMARQUE

Une fonction est continue en a.
Si la courbe Cf est tracée "sans lever le crayon" sur un intervalle de centre a.

Exemple

• Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{|x|}{x} & (\forall x \neq 0) \\ f(0) = 1 \end{cases}$.

1. Montrons que f est continue à droite de 0.

2. Montrons que f n'est pas continue à gauche en 0.

3. f est-elle continue en 0 ?

En effet :

1. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{|x|}{x} \Longrightarrow \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{x}{x} = 1$.

Et comme : $f(0) = 1$ alors $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = f(0)$ par suite f est continue à droite en 0.

2. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{|x|}{x} \Longrightarrow \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{-\cancel{x}}{\cancel{x}} = -1$.

Et comme : $f(0) = 1$ alors $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) \neq f(0)$ par suite f n'est pas continue à gauche en 0.

3. On a : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = 1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = -1$

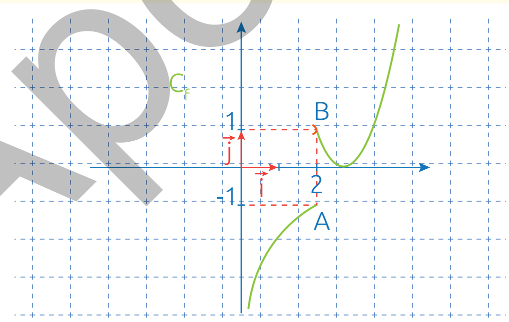
par suite f n'admet pas de limite en 0 ; d'où f n'est pas continue en 0.

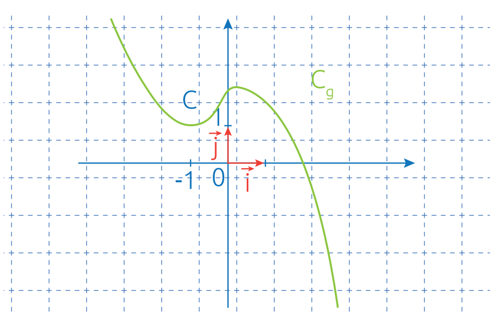
Théorème :

Une fonction est continue en a si et seulement elle est continue à droite et à gauche en a.

Exemple

Les courbes ci-dessous représentent les fonctions f et g.





On a : $B(2, 1) \notin Cf$ donc $f(2) \neq 1$ et $A(2, -1) \in Cf$ donc $f(2) = -1$.

et on a : $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x) = 1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x) = -1$

Donc $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ n'existe pas, par suite f n'est pas continue en 2.

On a : $C(-1, 1) \in Cg$ donc $g(-1) = 1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to(-1)\\ x<-1}} g(x) = 1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to(-1)\\ x>-1}} g(x) = 1$ par suite $\lim\limits_{x\to -1} g(x) = 1$

et comme : $g(-1) = 1$ alors g est continue en -1.

Vidéo

III Continuité sur un intervalle .

1. Définition

1. f est continue sur $]a;b[$ si f est continue en tout réel $x_o \in]a,b[$.

2. f est continue sur $[a;b[$ si f est continue sur $]a,b[$ et à droite en a .

3. f est continue sur $]a;b]$ si f est continue sur $]a,b[$ et à gauche en b .

4. f est continue sur $[a,b]$ si f est continue sur $]a,b[$ et à droite en a et à gauche en b .

REMARQUE

• f est continue sur l'intervalle I , si la courbe Cf .

Se trace sans le ver le crayon

Exemple

1. Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.

Montrons que f est continue sur $[0, +\infty[$.

Soit $a > 0$, on a $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$ et $f(a) = \sqrt{a}$, donc f est continue sur $]0, +\infty[$

et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \sqrt{x} = 0$ et $f(0) = 0$, donc f est continue sur $[0, +\infty[$

2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3$.

Montrons que : g est continue sur $\mathbb{R}$.

En effet :

Soit $a \in \mathbb{R}$, on a : $g(a) = a^3$ et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \lim\limits_{x \to a} x^3 = a^3$

Donc $\lim\limits_{x \to a} g(x) = g(a)$, par suite g est continue en tout réel a sur $\mathbb{R}$,

D'où g est continue sur $\mathbb{R}$.

2. Continuité des fonctions de référence

Théorème :

- Les fonctions constantes sont continues sur $\mathbb{R}$.
- Les fonctions $x \longmapsto x^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ sont continues sur $\mathbb{R}$.
- Les fonctions $x \longmapsto \frac{1}{x^n}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ sont continues sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.
- La fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0, +\infty[$.
- Les deux fonctions sinus et cosinus sont continues sur $\mathbb{R}$.

Exemple

Montrons que la fonctions f définie sur $]0, +\infty[$

Par : $\begin{cases} f(x) = x^2 & \text{si } x \geq 1 \\ f(x) = \frac{1}{x^3} & \text{si } 0 < x < 1 \end{cases}$ est continue sur $]0; +\infty[$

En effet :

La fonction $x \longmapsto x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$ par suite f est continue sur $[1, +\infty[$

La fonction $x \longmapsto \frac{1}{x^3}$ est continue sur $]0, +\infty[$ par suite f est continue sur $]0, 1[$

Reste a étudier la continuité à gauche en 1 .

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} \frac{1}{x^3} = 1$ et comme $f(1) = 1$ en alors $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} f(x) = f(1)$ par suite f est continue à gauche de 1, donc f est continue sur $]0, +\infty[$

3. Opérations sur les fonctions continues :

Théorème :

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I .

1. Si f et g sont continues sur I alors $f+g$ et $f\times g$ et kf sont continues sur I avec k un réel constant .

2. Si f et g sont continues sur I et g ne s'annule par sur I alors $\dfrac{f}{g}$ et $\dfrac{1}{g}$ sont continues sur I .

Exemple

• On a : $f : x \longmapsto x^2$ et $g : x \longmapsto 3x$ sont continues sur $\mathbb{R}$

Donc $f+g : x \longmapsto x^2 + 3x$ est continue sur $\mathbb{R}$

• On a : $f : x \longmapsto x^2 + 3$ et $g : x \longmapsto x^2 - 4$ sont continues sur $]2, +\infty[$ et g ne s'annule pas sur $]2, +\infty[$ donc $\dfrac{f}{g} : x \longmapsto \dfrac{x^2+3}{x^2-4}$ est continue sur $]2, +\infty[$.

Théorème :

1. Toute fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$.

2. Toute fonction rationnelle est continue sur chacun des intervalles de son domaine de définition .

3. Si f est continue sur un intervalle I et g est continue sur un intervalle J tel que $f(I)\subset J$ alors gof est continue sur I .

4. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ et g est continue en ℓ alors $\lim\limits_{x\to a}(gof)(x) = g(\ell)$.

Info

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle

Exemple

Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} sin\left(\dfrac{2x+1}{x}.\pi\right)$ et $\lim\limits_{x\to2}\sqrt{\dfrac{x^2+4x-12}{x^2-2x}}$

• On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+1}{x}\pi = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{x}\pi = 2\pi$ et comme la fonction sin est continue en 2π

Alors $\lim\limits_{x\to+\infty} sin\left(\dfrac{2x+1}{x}\pi\right) = sin(2\pi) = 0$

• On a : $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+4x-12}{x^2-2x} = \lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x-2)(x+6)}{x(x-2)} = \lim\limits_{x\to2}\dfrac{x+6}{x} = 4$ et comme la fonction $\sqrt{\ }$ est continue en 4 alors $\lim\limits_{x\to2}\sqrt{\dfrac{x^2+4x-12}{x^2-2x}} = \sqrt{4} = 2$

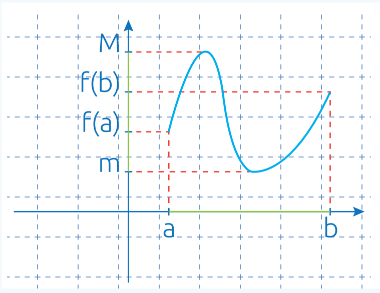
Exemple

1. La fonction $f : x \longmapsto 3x^4 - 5x^3 + 2x - 2$ est continue sur $\mathbb{R}$ car f une fonction polynôme .

2. $f : x \longmapsto \dfrac{x^3-1}{x^2-5x+6}$ f est une fonction rationnelle et $Df =]-\infty, 2[\cup]2, 3[\cup]3, +\infty[$ donc f est continue sur chacun des intervalles $]-\infty, 2[$, $]2, 3[$ et $]3, +\infty[$.

3. $h : x \longmapsto \sqrt{2x-6}$ définie sur $[3; +\infty[$ posons $g(x) = 2x-6$; g est continue sur $[3; +\infty[$ en tant que fonction polynôme et la fonction $f : x \longmapsto \sqrt{x}$ et continue sur $[0; +\infty[$ et comme $g(x)\geq 0$ pour $x\in[3, +\infty[$, alors la fonction h qui est la composée des fonctions f et g est continue sur $[3, +\infty[$ $(h(x) = f(g(x)) = fog(x))$

4. Image d'un intervalle par une fonction continue



Théorème :

Si f est une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$

alors l'image de cet intervalle $[a, b]$ est l'intervalle

$f([a, b]) = \left[\min_{a \le x \le b} f(x) \,;\, \max_{a \le x \le b} f(x)\right]$

Exemples

Le tableau ci-dessous est le tableau de variation d'une fonction f continue sur $]-\infty, 2]$

x	$-\infty$		-2		-1		0		2
$f(x)$	$+\infty$	↘	-3	↗	2	↘	-5	↗	1

$f([-2, 0]) = [-5, 2]$ et $f([-2, -1]) = [-3, 2]$;

$f([-1, 2]) = [-5, 2]$ et $f([-1, 0]) = [-5, 2]$.

• Image d'un intervalle par une fonction continue et strictement monotone .

Intervalle I	$f(I)$ (f Continue et croissante sur I).	$f(I)$ (f Continue et décroissante sur I).
$[a, b]$	$[f(a); f(b)]$	$[f(b); f(a)]$
$]a; b]$	$\left]\lim_{x \to a^+} f(x); f(b)\right]$	$\left[f(b); \lim_{x \to a^+} f(x)\right[$
$[a; b[$	$\left[f(a); \lim_{x \to b^-} f(x)\right[$	$\left]\lim_{x \to b^-} f(x); f(a)\right]$
$]a; b[$	$\left]\lim_{x \to a^+} f(x), \lim_{x \to b^-} f(x)\right[$	$\left]\lim_{x \to b^-} f(x), \lim_{x \to a^+} f(x)\right[$
$\mathbb{R}$	$\left]\lim_{x \to -\infty} f(x); \lim_{x \to +\infty} f(x)\right[$	$\left]\lim_{x \to +\infty} f(x); \lim_{x \to -\infty} f(x)\right[$

IV Théorème des valeurs intermédiaires et son corollaire

1. Théorème :

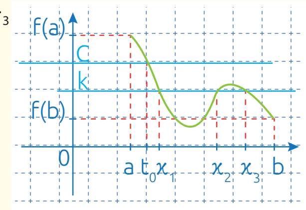
Soit f une fonction définie et continue sur intervalle I . a et b deux réels de I avec $a < b$
pour tout k

compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel t de $[a; b]$ tel que $f(t) = k$.

Autrement dit l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution dans $[a, b]$.

Exemple

- $f(x)=k$ admet trois solutions dans $[a;b]$ qui sont x_1 , x_2 et x_3
- $f(x)=c$ admet une seule solution dans $[a;b]$ qui est t_0 .



2. Corollaire :

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur $[a;b]$ alors pour tout réel k entre $f(a)$ et $f(b)$ l'équation $f(x) = k$ admet une seule solution t dans $[a;b]$.

Conséquence :

- Si f est un continue sur $[a;b]$ et $f(a)\times f(b) < 0$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution $\alpha \in]a,b[$
- Si de plus f est strictement monotone sur $[a;b]$ alors la solution α est unique.

Info

Le mot "dichotomie" provient du grec dikhotomia qui signifie "division en deux parties"

3. Encadrement de la solution de l'équation $f(x) = 0$

Parmi les méthode pour déterminer un encadrement de t la solution de l'équation $f(x) = 0$, on propose un alogarithme de dichotomie.

Le principe est de déterminer successivement l'intervalle dans lequel se situe la solution t , en divisant par deux l'amplitude de l'intervalle à chaque étape .

Pour cela, on calcule $m = \frac{a+b}{2}$ le milieu de l'intervalle $[a;b]$ puis on doit calculer $f(m)$ alors si 0 est compris entre $f(a)$ et $f(m)$ dans ce cas $t \in [a;m]$ et si 0 est compris entre $f(m)$ et $f(b)$ dans ce cas $t \in [m;b]$.

Si $t \in [a,m]$, on réitère le procédé dans $[a,m]$ sinon on réitère le procédé dans $[m;b]$.

Variables : a ; b ; m réels P entier et f fonction .

Entrées : Lire a ; b ; P .

Traitement : Tant que $b - a > 10^{-P}$ faire $\frac{a+b}{2} \longrightarrow m$.

Si $f(a)\times f(m) > 0$ alors $m \rightarrow a$ sinon $m \longrightarrow b$.

Fin sorties : Afficher a ; b et P .

Video

Exemple

- On rentre $a=1$ et $b=2$ et $P=6$ et $f(x)=x^3-2$.
- On obtient : $a=1,259\,920\,12$ et $b=1,259\,921\,074$.

diochotomie

G6 =SI(B5*D5<0;A5;G5)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
2	On considére la fonction f définie S(N2) par f(x)=x^3-2								
3	C=(a+b)/2	f(a)	f(b)	f(c)		a < t < b		amplitude	N.d'itérations
4	1,5	-1	6	1,375		1 < t < 2		1	0
5	1,25	-1	1,375	-0,046875		1 < t < 1,5		0,5	1
6	1,375	-0,046875	1,375	0,599609375		1,25 < t < 1,5		0,25	2
7	1,3125	-0,046875	0,599609375	0,260986328		1,25 < t < 1,375000		0,125	3
8	1,28125	-0,046875	0,260986328	0,103302002		1,25 < t < 1,312500		0,0625	4
9	1,265625	-0,046875	0,103302002	0,02728653		1,25 < t < 1,28125		0,03125	5
10	1,2578125	-0,046875	0,02728653	-0,010024548		1,25 < t < 1,265625		0,015625	6
11	1,26171875	-0,01002455	0,02728653	0,008573234		1,2578125 < t < 1,265625		0,0078125	7
12	1,259765625	-0,01002455	0,008573234	-0,000740074		1,2578125 < t < 1,26171875		0,00390625	8
13	1,260742188	-0,00074007	0,008573234	0,003912973		1,259765625 < t < 1,26171875		0,001953125	9
14	1,260253906	-0,00074007	0,003912973	0,001585548		1,259765625 < t < 1,2607421875		0,0009765625	10
15	1,260009766	-0,00074007	0,001585548	0,000422512		1,259765625 < t < 1,26025390625		0,00048828125	11
16	1,259887695	-0,00074007	0,000422512	-0,000158837		1,259765625 < t < 1,260009765625		0,00024414062	12
17	1,25994873	-0,00015884	0,000422512	0,000131823		1,2598876953125 < t < 1,260009765625		0,00012207031	13
18	1,259918213	-0,00015884	0,00013182	-0,00001351		1,2598876953125 < t < 1,25994873046875		0,00006103515	14
19	1,259933472	-0,00001351	0,00013182	0,00005916		1,25991821289062 < t < 1,25994873046875		0,00003051757	15
20	1,259925842	-0,00001351	0,00005916	0,00002282		1,25991821289062 < t < 1,25993347167968		0,00001525878	16
21	1,259922028	-0,00001351	0,00002282	0,0000466		1,25991821289062 < t < 1,25992584228515		0,00007629394	17
22	1,25992012	-0,00001351	0,00000466	-0,00000443		1,25991821289062 < t < 1,25992202758789		0,00003814697	18
23	1,259921074	-0,00000443	0,00000466	0,00000011		1,25992012023925 < t < 1,25992202758789		0,00001907348	19
24	1,259920597	-0,00000443	0,00000011	0,00000216		1,25992012023925 < t < 1,25992107391357		Encadrement cherché	20

Note

• Si f est continue et strictement monotone sur I et $O \in f(I)$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans I .

V Fonction réciproque d'une fonction continue et strictement monotonie .

1. Théorème de bijection :

Si f et une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I alors pour tout $y \in f(I)$. Il existe un seul élément x de I tel que $f(x) = y$, qu'on note $f^{-1}(y)$.

Exemple

Soit $f : x \longmapsto 2x^3 + x - 2$ une fonction définie $\mathbb{R}$.

- f est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynôme .
- $f'(x) = 6x^2 + 1 > 0$ donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- $f(\mathbb{R}) = f(]-\infty, +\infty[) =]\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) \; ; \; \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)[$,

Or : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} 2x^3 = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} 2x^3 = +\infty$.

Donc : $f(\mathbb{R}) =]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$.

Donc d'après le théorème de bijection pour tout $y \in \mathbb{R}$; il existe un seul élément de x tel que : $f(x) = y$.

Par exemple :

$O \in f(\mathbb{R}) =]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$ donc il existe un seul réel a tel que : $f(a) = 0$ autrement dit , il existe un seul réel a tel que : $2a^3 + a - 2 = 0$.

REMARQUE

a. $(\forall x \in I)$

et $(\forall y \in J)$

$f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$

b. $(\forall x \in I)$

et $(f^{-1} o f)(x) = x$

et $\forall x \in J$

$(f o f^{-1})(x) = x$

2. Définition :

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur I . La fonction qui a chaque élément y de $f(I)$ associe l'élément x de I avec $f(x) = y$ est appelé la fonction réciproque de f qu'on note f^{-1} elle est définie sur $f(I)$.

Exemple

Soit f une fonction définie sur $[1; +\infty[$ par $f(x) = x^2 - 2x + 3$.

a. Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J qu'on doit déterminer .

b. Calculer $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

Réponse :

a. On a : $f(x) = x^2 - 2x + 3$ pour tout $x \in [1, +\infty[$.

f est continue sur $[1, +\infty[$ en tant que fonction polynôme .

$f'(x) = 2x - 2 = 2(x - 1)$ et comme $x \in]1, +\infty[\Longrightarrow x > 1 \Longrightarrow f'(x) > 0, et\ f'(1) = 0$

Donc f est strictement croissante sur $[1, +\infty[$.

Donc f admet une fonction réciproque f^{-1} qui est définie sur

$J = f(I) = f([1, +\infty[) = [f(1), \lim_{x \to +\infty} f(x)[$

D'où : $J = [2, +\infty[$.

b. Calculons $f^{-1}(x)$ avec $x \in J = [2, +\infty[$.

On pose : $f^{-1}(x) = t$ avec $x \in [2, +\infty[$ et $t \in [1, +\infty[$, on a : $f^{-1}(x) = t$

$f(t) = x \Longleftrightarrow t^2 - 2t + 3 = x$.

$f(t) = x \Longleftrightarrow t^2 - 2t = x - 3$.

$f(t) = x \Longleftrightarrow t^2 - 2t + 1 = x - 3 + 1$.

$f(t) = x \Longleftrightarrow (t - 1)^2 = x - 2$ et comme $x \in [2, +\infty[$ donc $x - 2 \geq 0$ et on a aussi $t \in [1, +\infty[$.

Donc $t - 1 \geqslant 0$ par suite $t - 1 = \sqrt{x - 2}$ d'où : $t = 1 + \sqrt{x - 2}$

Par suite : $f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{x - 2}$ pour tout $x \in J$.

3. Propriétés de la fonction réciproque :

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I alors f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $J = f(I)$ et on a :

1. f^{-1} est continue sur $f(I)$.

2. La monotonie de f^{-1} sur $f(I)$ est la même monotonie de f sur I .

3. Les deux courbes (Cf) et (Cf^{-1}) dans un repère orthonormé sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Exemple

Soit f une fonction définie par $f(x) = x^2 - 2x + 3$ sur $]-\infty, 1]$.

1. Montrons que f admet une fonction réciproque f^{-1} sur $J = f(]-\infty, 1])$.

2. Calculons $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

3. Traçons Cf^{-1} .

Réponse :

1. On a : $f(x) = x^2 - 2x + 3$ pour tout $x \in]-\infty, 1]$.

• Comme la fonction $x \longmapsto x^2 - 2x + 3$ est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynôme donc la fonction f est continue sur $]-\infty, 1]$.

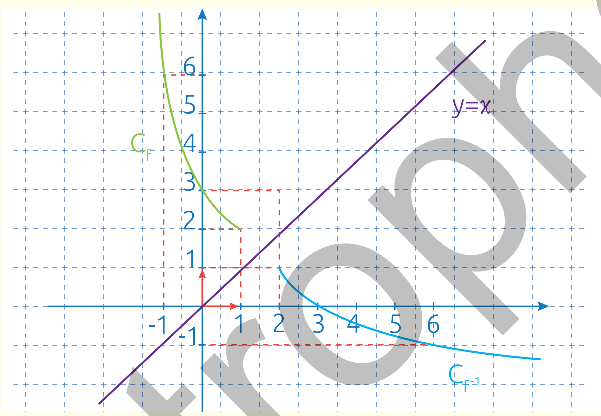
• On a f est dérivable sur $]-\infty, 1]$ et $f'(x) = 2(x-1)$ et comme $x \in]-\infty, 1[$ alors $f'(x) < 0$.

et par suite la fonction f est strictement décroissante sur $]-\infty, 1]$.

et $f(]-\infty, 1]) = [f(1); \lim\limits_{x \to -\infty} f(x)[$

et comme $f(1) = 2$

et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$



Alors : $J = f(]-\infty, 1]) = [2, +\infty[$.

On a : f est continue et strictement décroissante sur $]-\infty, 1]$ et $f(]-\infty, 1]) = [2, +\infty[$

Donc : f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $J = [2, +\infty[$.

2. Calculons $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$. On pose $f^{-1}(x) = t$ avec $x \in J$ et $t \in]-\infty, 1]$.

On a $f^{-1}(x) = t$

$\Longleftrightarrow f(t) = x \Longleftrightarrow t^2 - 2t + 3 = x$.

$\Longleftrightarrow t^2 - 2t = x - 3$

$\Longleftrightarrow t^2 - 2t + 1 = x - 3 + 1$

$f(t) = x \Longleftrightarrow (t-1)^2 = x - 2$

et comme : $x - 2 \geqslant 0$ et $t - 1 \leqslant 0$

Alors $t - 1 = -\sqrt{x-2}$, d'où : $t = 1 - \sqrt{x-2}$.

par suite : $\forall x \in [2, +\infty[\quad f^{-1}(x) = 1 - \sqrt{x-2}$.

3. La courbe de Cf^{-1} dans un repère orthonormé. On sait que Cf^{-1} et Cf sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

LEXIQUE

• **Continuité :** إتصال

• **Théorème des valeurs intermédiaires :** مبرهنة القيم الوسطية

1 Continuité d'une fonction en un réel

Soit f une fonction définie par :

$$\begin{cases} \forall x > 1 & f(x) = \dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2+x-2} \\ \forall x < 1 & f(x) = \dfrac{x^2+bx}{x^2+4x-5} \end{cases}, \quad f(1) = \frac{1}{6}.$$

1 • Montrer que f est continue à droite en 1 .

2 • Déterminer la valeur de b pour que f soit continue à gauche en 1 .

Réponses :

1 • On a : $f(1) = \frac{1}{6}$

et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2+x-2} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} \dfrac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)(x-1)(x+2)}$.

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} \dfrac{(x-1)}{(\sqrt{x}+1)(x-1)(x+2)} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} \dfrac{1}{(\sqrt{x}+1)(x+2)}$.

Donc : $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} f(x) = \frac{1}{6}$ et comme $f(1) = \frac{1}{6}$

Alors $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} f(x) = f(1)$ par suite f est continue à droite en 1.

2 • Pour que f soit continue à gauche en 1; il faut et il suffit que : $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} f(x) = f(1) = \frac{1}{6}$.

On a : $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} x^2 - bx = 1 - b$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} x^2 + 4x - 5 = 0$.

• **1er cas :** si $1 + b \neq 0$ alors $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} f(x) = \infty$

et par suite f n'est pas continue à gauche en 1 .

• **2ème cas :** si $1 + b = 0$ alors $b = -1$

et dans ce cas $f(x) = \dfrac{x^2-x}{x^2+4x-5}$ pour $x < 1$

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} \dfrac{x(x-1)}{(x-1)(x+5)} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} \dfrac{x}{x+5}$.

Donc : $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} f(x) = \frac{1}{6}$ et comme $f(1) = \frac{1}{6}$

Alors $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} f(x) = f(1)$

Donc : f est continue à gauche en 1 ; si $b = -1$.

2 Continuité sur un intervalle

On considère la fonction f définie par :

$$\begin{cases} (\forall x \geqslant 0) & f(x) = 3x^3 - 2x^2 + 1 \\ (\forall x < 0) & f(x) = \dfrac{x^2+x}{x} \end{cases}.$$

1 • Justifier que : $D_f = \mathbb{R}$ (domaine de définition de f).

2 • Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

3 • Montrer f est continue en 0 .

4 • Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

Réponses :

1 • $D_f = \{x \in \mathbb{R} \,/\, f(x)\, existe\}$;

$D_f = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \geqslant 0\} \cup \{x \in \mathbb{R} \,/\, x < 0 \text{ et } x \neq 0\}$.

Donc : $D_f =]-\infty, 0[\cup [0, +\infty[\Longrightarrow D_f = \mathbb{R}$.

2 • $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} 3x^3 - 2x^2 + 1 = \lim\limits_{x \to +\infty} 3x^3 = +\infty$.

Donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$;

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2+x}{x}$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$.

Donc : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

3 • On a $f(0) = 1$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 1 = f(0)$

Donc f est continue en 0

4 • On a sur : $[0, +\infty[$ $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + 1$.

et comme la fonction $x \longrightarrow 3x^3 - 2x^2 + 1$ est continue sur $\mathbb{R}$ en tant qu'une fonction polynôme alors f est continue sur $[0, +\infty[$.

On a sur $]-\infty, o]$ les deux fonctions $x \longmapsto x^2 + x$ et $x \longmapsto x$ sont continues et comme $x \neq 0$ sur $]-\infty, 0[$

Alors la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{x^2+x}{x}$ est continue sur $]-\infty, 0[$.

De plus on a f est continue en 0 .

Donc la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

3 Théorème des valeurs intermédiaires

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x^3 - 3x^2 & par\ x \leqslant 1 \\ f(x) = 2x^2 - 4 & par\ x > 1 \end{cases}.$$

1 • Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

2 • Étudier les variations de f sur $]-\infty, 1]$ et sur $]1, +\infty[$.

3 • En déduire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

4 •

a. Montrer que l'équation $f(x) = -1$ admet trois solutions dans $\mathbb{R}$.

b. Montrer que l'équation $f(x) = -6$ admet une seule solution dans $\mathbb{R}$.

Réponses :

1 • On a : $\forall x \leqslant 1 \;\; f(x) = x^3 - 3x^2$

Et comme la fonction $x \longmapsto x^3 - 3x^2$ est un fonction polynôme continue sur $\mathbb{R}$ alors f est continue sur $]-\infty, 1]$.

• On a : $\forall x > 1 \;\; f(x) = 2x^2 - 4$ et comme la fonction $x \longmapsto 2x^2 - 4$ est une fonction polynôme continue sur $\mathbb{R}$ alors f est continue sur $]1, +\infty[$.

• Reste la continuité à droite en : 1 .

On a : $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} 2x^2 - 4 = 2(1)^2 - 4 = -2$ et comme

$f(1) = -4$ alors f est continue à droite de 1 ;
Par suite f est continue sur $\mathbb{R}$.

2 • On a : $\forall x \in]-\infty, 1] \;\; f(x) = x^3 - 3x^2$,

D'où $f'(x) = 3x^2 - 6x \;\;\; f'(x) = 3(x^2 - 2x)$.

x	$-\infty$		0		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-2

Et on a : $\forall x \in]1, +\infty[$, $f(x) = 2x^2 - 4$;
D'où $f'(x) = 4x$.

x	1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Par suite : f est croissante sur $]-\infty, 0]$ et sur $]1, +\infty[$
et f est décroissante sur $[0, 1]$

3 • Tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

4 •

a. Montrons que l'équation $f(x) = -1$ admet trois solutions :

• On a $f(]-\infty, 0]) =]-\infty, 0]$ et $-1 \in]-\infty, 0]$

D'où : $(-1) \in f(]-\infty, 0])$ et comme f est continue et strictement monotone sur $]-\infty, 0]$ alors d'après théorème des valeurs intermédiaires ($T.V.I$) l'équation $f(x) = -1$ admet une seule solution dans $]-\infty, 0]$.

• On a $f([0, 1]) = [-2, 0]$ et $(-1) \in [-2, 0]$

D'où $(-1) \in f([0, 1])$ et de plus f est continue et strictement monotone sur $[0, 1]$, donc d'après $T.V.I$ l'équation $f(x) = -1$ admet une seule solution dans $[0, 1]$.

• On a $f([1, +\infty[) = [-2, +\infty[$ et $-1 \in [-2, +\infty[$

D'où $(-1) \in f([1, +\infty[)$ et de plus f est continue et strictement monotone sur $[1, +\infty[$;

Donc d'après $T.V.I$ l'équation $f(x) = -1$ admet une seule solution dans $\mathbb{R}$.

b. Montrons que l'équation $f(x) = -6$ admet une seule solution dans $\mathbb{R}$.

• On a $f(]-\infty, 0]) =]-\infty, 0]$ et $-6 \in]-\infty, 0]$

Donc $-6 \in f(]-\infty, 0])$ et de plus f est continue et strictement monotone sur $]-\infty, 0]$

Donc l'équation $f(x) = -6$ admet une seule solutions dans $]-\infty, 0]$. (d'après $T.V.I$) .

• On a $f([0, 1]) = [-2, 0]$ et comme $-6 \notin [-2, 0]$

Donc $-6 \notin ([0, 1])$ par suite l'équation $f(x) = -6$ n'admet pas de solution dans $[0, 1]$.

• On a $f([1, +\infty[) = [-2, +\infty[$ et $-6 \notin [-2, +\infty[$

Donc $-6 \notin ([0, 1])$ par suite l'équation $f(x) = -6$ n'admet pas de solution dans $[1, +\infty[$.

Finalement l'équation $f(x) = -6$ admet une seule solution dans $\mathbb{R}$.

4 Fonction réciproque

Soit f la fonction définie sur $]-\infty, 1[$ par :

$$f(x) = \frac{x^3}{x^3 - 1}$$

1 • Montrer que f est continue sur $]-\infty, 1[$.

2 •

a. Vérifier que $f(x) = 1 + \frac{1}{x - 1}$ pour tout $x \in]-\infty, 1[$.

b. Montrer que f est strictement décroissante sur $]-\infty, 1[$.

3 • En déduire que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J qu'on doit déterminer.

4 • La courbe ci-dessous représente la fonction f recopier et tracer $C_{f^{-1}}$.

Réponses :

On a : $\forall x \in]-\infty, 1[\;\; f(x) = \frac{x^3}{x^3 - 1}$.

1 • Les deux fonction $U : x \mapsto x^3 \;\; V : x \longmapsto x^3 - 1$ sont continues sur $]-\infty, 1[$ de plus sur $]-\infty, 1[$ $x^3 - 1 \neq 0$; par suite f est continue sur $]-\infty, 1[$.

2 •

a. On a : $f(x) = \dfrac{x^3}{x^3-1} = \dfrac{x^3-1+1}{x^3-1} = \dfrac{x^3-1}{x^3-1} + \dfrac{1}{x^3-1}$

Donc $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x^3-1}$.

b. On a : $\forall x \in]-\infty, 1[$ $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x^3-1}$.

$f'(x) = 0 + \dfrac{3x^2}{(x^3-1)^2} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{-3x^2}{(x^3-1)^2} \leq 0$

pour tout x de $]-\infty, 1[$.

Donc f est strictement décroissante sur $]-\infty, 1[$,

3 • On a : f est continue et strictement décroissante sur $]-\infty, 1[$.

Donc f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur

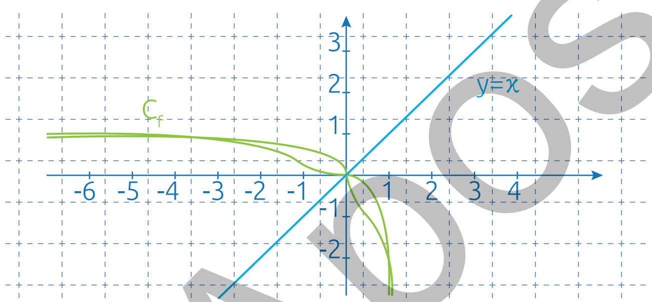
$J = f(]-\infty, 1[) = \left]\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} f(x) \,;\, \lim\limits_{x \to -\infty} f(x)\right[$;

$\lim\limits_{\substack{x \to (1)^- \\ x<1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} \dfrac{x^3}{x^3-1} = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3}{x^3-1}$

D'où : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\cancel{x^3}}{\cancel{x^3}} = \lim\limits_{x \to -\infty} 1 = 1$

Par suite : $J =]-\infty, 1[$.

4 •



5 Fonction réciproque

Soit f la fonction définie sur $]1, +\infty[$; $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x-1}$.

1 • Montrer que : $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

2 • Montrer que : $\forall x \in]1, +\infty[$;

$$f'(x) = \frac{-(x+1)}{2\sqrt{x}(x-1)^2} .$$

3 • Dresser le tableau de variation de f .

4 • En déduire que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur l'intervalle J qu'on doit déterminer.

5 • Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout x de J .

Réponses :

1 • On a : $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = ?$

On a : $\lim\limits_{x \to 1^+} \sqrt{x} = 1$ et $\lim\limits_{x \to 1^+} x - 1 = 0$

et comme on a : $x > 1$ donc $x - 1 > 0$.

par suite : $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{x-1} = \dfrac{\cancel{\sqrt{x}}}{\cancel{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)}$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}-1} = 0$.

2 • $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x-1}$.

$f'(x) = \dfrac{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}(x-1) - \sqrt{x} \times 1}{(x-1)^2}$.

$f'(x) = \dfrac{x-1-2x}{2\sqrt{x}(x-1)^2}$.

$f'(x) = \dfrac{-x-1}{2\sqrt{x}(x-1)^2}$.

D'où : $f'(x) = \dfrac{-(x+1)}{2\sqrt{x}(x-1)^2}$ pour tout x de $]1, +\infty[$.

3 • On a : $\forall x \in]1, +\infty[$, $f'(x) < 0$

Donc f est strictement décroissante sur x de $]1, +\infty[$.

x	1	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	0

4 • f est continue et strictement décroissante donc f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $J =]0, +\infty[$.

5 • $f^{-1}(x) = y \Longleftrightarrow f(y) = x$ avec $x > 0$ et $y > 1$.

$f(y) = x \Longleftrightarrow \dfrac{\sqrt{y}}{y-1} = x \Longleftrightarrow \sqrt{y} = xy - x$.

$f(y) = x \Longleftrightarrow xy - \sqrt{y} - x = 0$.

$f(y) = x \Longleftrightarrow x(\sqrt{y})^2 - (\sqrt{y}) - x = 0$.

On pose : $Y = \sqrt{y}$ donc $xY^2 - Y - x = 0$.

$\Delta = (1)^2 - 4(x)(-x) \Longleftrightarrow \Delta = 1 + 4x^2 > 0$.

$Y = \dfrac{-(-1)+\sqrt{1+4x^2}}{2x}$ ou $Y = \dfrac{-(-1)-\sqrt{1+4x^2}}{2x}$.

$Y = \dfrac{1+\sqrt{1+4x^2}}{2x}$ ou $Y = \dfrac{1-\sqrt{1+4x^2}}{2x}$.

et comme : $y > 1$ alors $Y > 1$.

Donc : $Y = \dfrac{1+\sqrt{1+4x^2}}{2x} \Longrightarrow y = \left(\dfrac{1+\sqrt{1+4x^2}}{2x}\right)^2$

D'où : $f^{-1}(x) = \left(\dfrac{1+\sqrt{1+4x^2}}{2x}\right)^2$ pour tout $x \in]0, +\infty[$

6 Fonction réciproque

Soit f la fonction définie sur $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x+1}}$.

1 • Déterminer D_f (le domaine de définition de la fonction f).

2 • Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\lim\limits_{\substack{x\to-1\\ x>-1}} f(x)$.

3 •

a. Montrer que $\forall x\in D_f \quad f'(x)=\dfrac{(x+2)\sqrt{x+1}}{2(x+1)^2}$.

b. Dresser le tableau de variations de f sur D_f .

4 • Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

5 • Comparer $f^{-1}(2021)$ et $f^{-1}(2022)$.

6 • Dresser le tableau de variations de f^{-1} sur J .

7 • Calculer $f^{-1}(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$ (Distinguer les deux cas $x\geq 0$ et $x\leq 0$).

Réponses :

1 • On a $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x+1}}$

$D_f=\{x\in\mathbb{R} \,/\, x+1>0\}\Leftrightarrow D_f=\{x\in\mathbb{R}\,/\,x>-1\}$

Donc $D_f=\,]-1,+\infty[$

2 •

a. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x+1}}\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{x+1}}$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{x^2}{x+1}}$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

Note :

- Si $x\geq 0 \quad x=\sqrt{x^2}$
- Si $x\geq 0 \quad x=\sqrt{x^2}$

- $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\ x>-1}} f(x)'=\lim\limits_{\substack{x\to-1\\ x>-1}}\dfrac{x}{\sqrt{x+1}}=-\infty$

Car $\lim\limits_{x\to-1} x=-1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\ x>-1}}\sqrt{x+1}=0$

Donc $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\ x>-1}} f(x)=-\infty$

3 •

a. On a $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x+1}}$ donc $f'(x)=\dfrac{1\sqrt{x+1}-\dfrac{x}{2\sqrt{x+1}}}{x+1}$

D'où $f'(x)=\dfrac{2(x+1)-x}{(x+1)\sqrt{x+1}}=\dfrac{x+2}{(x+1)\sqrt{x+1}}$

Donc $f'(x)=\dfrac{(x+2)\sqrt{x+1}}{(x+1)^2}$ pour tout $x\in\,]-1,+\infty[$

b. On a $x\geq -1$ donc $x+2>0$ et $\dfrac{\sqrt{x+1}}{(x+1)^2}>0$

D'où $f'(x)>0$ pour tout x de $[-1,+\infty[$ par suite f est strictement croissante sur $[-1,+\infty[$.

- **Tableau de variations de f**

x	-1	$+\infty$
$f^{-1}(x)$	$-\infty$	$+\infty$

4 • On a f est continue et strictement monotone sur $]-1,+\infty[$ donc f admet une fonction réciproque définie sur $J=f(]-1,+\infty[)=\mathbb{R}$.

5 • On a f est strictement croissante sur $]-1,+\infty[$, donc f^{-1} est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ par suite $f^{-1}(2021)<f^{-1}(2022)$.

6 • Tableau de variations de f^{-1}

x	$-\infty$	$+\infty$
$f^{-1}(x)$	-1	$+\infty$

7 • Calculons $f^{-1}(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

On pose $\begin{cases} f^{-1}(x)=y \\ x\in\mathbb{R}\end{cases}$ $\begin{cases} f(y)=x \\ y\in\,]-1,+\infty[\end{cases}$

$$f(y)=x\Leftrightarrow\frac{y}{\sqrt{1+y}}=x$$
$$\Leftrightarrow y^2=x^2(1+y)$$
$$\Leftrightarrow y^2-x^2y=x^2$$
$$\Leftrightarrow\left(y-\frac{x^2}{2}\right)^2-\frac{x^4}{4}=x^2$$

$$f(y)=x\Leftrightarrow\left(y-\frac{x^2}{2}\right)=x^2+\frac{x^4}{4}=\frac{4x^2+x^4}{4}$$

$$\Leftrightarrow y-\frac{x^2}{2}=\frac{\sqrt{4x^2+x^4}}{2}\text{ ou } y-\frac{x^2}{2}=\frac{-\sqrt{4x^2+x^4}}{2}$$

$$\Leftrightarrow y=\frac{x^2+\sqrt{4x^2+x^4}}{2}\text{ ou } y=\frac{x^2-\sqrt{4x^2+x^4}}{2}$$

Donc $\begin{cases} f^{-1}(x)=\dfrac{x^2+\sqrt{4x^2+x^4}}{2} \; si\; x\geq 0 \\ et \\ f^{-1}(x)=\dfrac{x^2-\sqrt{4x^2+x^4}}{2}\; si\; x\leq 0\end{cases}$

Exercices d'application

Continuité en un nombre réel-continuité à droite et à gauche d'un nombre réel .

1 Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} & (x \neq 1) \\ f(1) = 2 \end{cases}$$

1 • Montrer que f est continue en 1 .

2 • Montrer que f est continue en (-1) .

2 Soit g une fonction définie sur $]-\infty, 2[\cup]2, +\infty[$ par

$$\begin{cases} g(x) = \dfrac{x^2 - x - 1}{x^2 - 3x + 2} & pour\ x > 1 \\ g(x) = \dfrac{2x^2 - x - 1}{1 - x} & pour\ x < 1 \\ g(1) = -3 \end{cases}$$

1 • Calculer $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x \mapsto 2^+} g(x)$ et $\lim\limits_{x \mapsto 2^-} g(x)$

2 •

a. Montrer que g est continue à gauche en 1 .

b. Montrer que g est continue à droite en 1 .

c. Que peut-on conclure ?

3 • Montrer que g est continue en 0 .

3 On considère la fonction h définie par :

$$\begin{cases} h(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2} - \sqrt{1 + x}} & pour\ x > -1 \\ h(0) = -2 \end{cases} .$$

• **Montrer** que h est continue en 0 .

4 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{2x - 2}{x^2 - 1} & pour\ x > 1 \\ f(1) = 1 \\ f(x) = \dfrac{ax + 6}{1 - x} & pour\ x < 1 \end{cases}$$

1 • Calculer $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x \mapsto 1 \\ x > 1}} f(x)$

2 • Calculer suivant les valeurs de a :

a. $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} f(x)$.

b. $\lim\limits_{\substack{x \mapsto 1 \\ x < 1}} f(x)$

3 • En déduire la valeur de α pour laquelle f est continue en 1 .

5 Soit g la fonction définie par :

$$\begin{cases} g(x) = \dfrac{x - 4}{a\sqrt{x} + 2} & pour\ x > 4 \\ g(x) = 2x - b & pour\ x \leqslant 4 \end{cases} .$$

• **Déterminer** les valeurs de a et b pour que g soit continue en 4 .

6 Soit f la fonction définie sur $[-3, +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2(x + 3)}}{x(x + 3)} \\ f(0) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\ et\ f(-3) = 1 \end{cases} .$$

1 • Étudier la continuité de f à droite et à gauche en 0 .

2 • Étudier la continuité de f à droite en -3 .

7 On considère la fonction h définie par :

$$\begin{cases} h(x) = x\ sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\ pour\ x \neq 0 \\ h(0) = 0 \end{cases} .$$

1 • Calculer $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} h(x)$ et $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} h(x)$.

2 • Montrer que h est continue en 0 .

8 Continuité sur un intervalle

Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{sin(x)}{x} & pour\ x > 0 \\ f(x) = x^2 - 3x + 1 & pour\ x \leqslant 0 \end{cases}$

1 • Étudier la continuité de f en 0 .

2 • Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

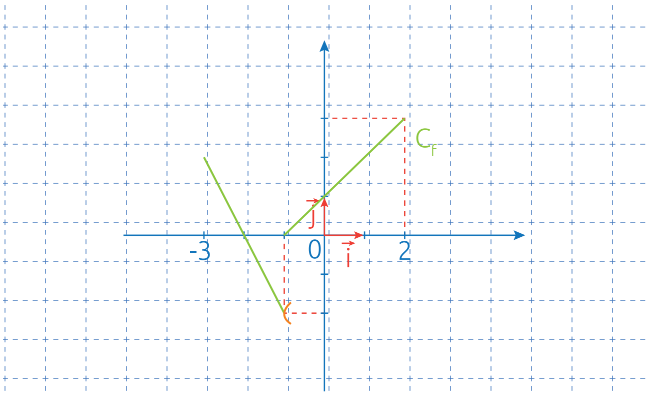
9 On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

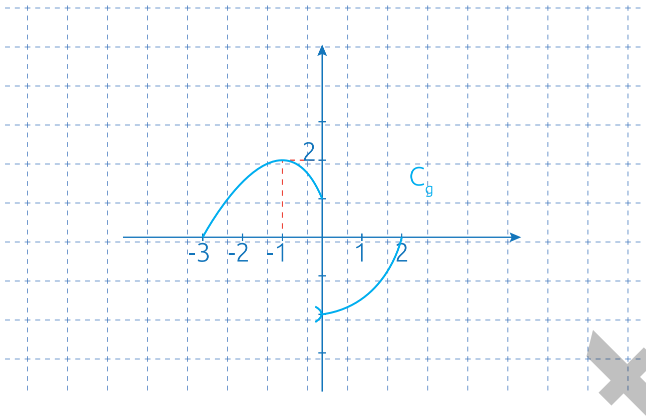
$$\begin{cases} g(x) = \dfrac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} & pour\ x > 4 \\ g(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 4}{20(x - 4)} & pour\ x < 4 \\ g(4) = \dfrac{1}{4} \end{cases} .$$

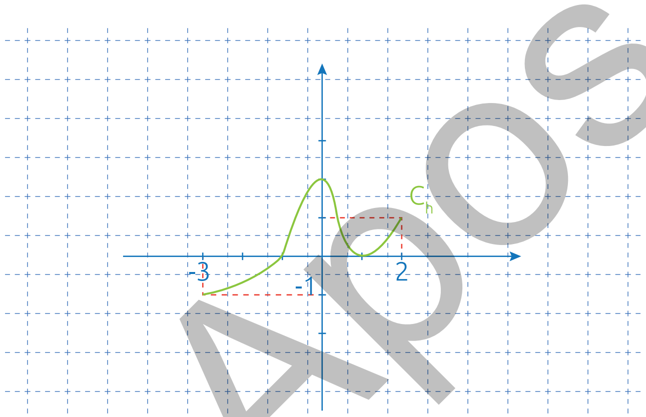
1 • Étudier la continuité de g en 8 .

2 • En déduire que g est continue sur $\mathbb{R}$.

10 **Les courbes ci-dessous représentent les fonctions f ; g et h sur $[-3,2]$.**







• **Étudier** la continuité des fonctions f ; g et h sur $[-3,2]$.

11 **Soit f la fonction définie par :**

$$\begin{cases} f(x) = 1 - 2x & si\ x < -1 \\ f(x) = x^2 - x & si\ x \geqslant -1 \end{cases} .$$

1 • Justifier que f est continue sur $]-\infty, -1[$ et sur $]-1, +\infty[$.

2 • Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

3 •

a. Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to-1 \\ x<-1}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to(-1)^+ \\ x>-1}} f(x)$ et $f(-1)$.

b. Que peut-on déduire pour la fonction f ?

12 **Soit f la fonction définie par :**

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x-3}{\sqrt{x+1}-2} & x > 3 \\ f(x) = \dfrac{x^2 - ax - 3}{-x^2 + 7x - 12} & x < 3 \\ f(3) = b \end{cases} .$$

1 • Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2 • Déterminer les deux nombres réels a et b pour que f soit continue en 3 .

3 • En déduire que f est continue sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $a = 2$ et $b = 4$.

13 **Soit g la fonction définie par :**

$$\begin{cases} g(x) = \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} & x \neq 1 \\ g(1) = \dfrac{1}{2} \end{cases} .$$

1 • Vérifier que : $D_g = [0, +\infty[$.

2 • Montrer que g est continue sur $[0, +\infty[$.

14 **Soit f la fonction définie sur $]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$**

par : $$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2 + x + b}{x^2 - 1} & x < 1 \\ f(1) = a \\ f(x) = \dfrac{x\sqrt{x}-1}{x-1} & x > 1 \end{cases} .$$

1 • Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

2 • Déterminer les deux nombres réels a et b pour que f soit continue sur $]-\infty, -1[$ et sur $]-1, +\infty[$.

15 **Théorème des valeurs intermédiaires**

Soit f une fonction définie sur : $[0, +\infty[$ par $f(x) = x\sqrt{x} - 3x + 1$.

1 • Montrer que : $\exists c \in [0, 1]$ tel que $f(c) = 0$.

2 • Montrer que : $\exists a \in [0, 1]$ tel que $f(a) = \dfrac{1}{2}$.

16 **Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :**
$g(x) = x^3 + x^2 + x - 2$

1 • Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une seule solution a dans $[0\,;1]$.

2 • Donner un encadrement de a d'amplitude $0,5$.

17 **Soit f une fonction continue sur $\left[\frac{1}{2},2\right]$ et soit g une fonction continue sur $\left[\frac{1}{2},2\right]$ définie par :**
$g(x) = f(x) - xf\left(\frac{1}{x}\right)$

1 • Montrer que g est continue sur $\left[\frac{1}{2},2\right]$.

2 • Montrer qu'il existe au moins $a \in \left[\frac{1}{2},2\right]$ tel que $g(a) = 0$.

3 • En déduire que : $f(a) = af\left(\frac{1}{a}\right)$.

18 **Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :**
$h(x) = 2x^3 + 6x - 2$.

1 • Montrer que : $\exists! c \in \mathbb{R} \,:\, f(c) = 0$

2 •

a. Calculer $h(0)$ et $h(1)$.

b. En déduire que : $c \in]0,1[$

3 • Donner le tableau de signe de $h(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

4 • Donner un encadrement de c d'amplitude inférieure à 10^{-1}.

19 **Fonction réciproque**

Soit f la fonction définie sur : $[1,+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x-1}$.

1 • Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J qu'on doit déterminer

2 • Calculer $f^{-1}(x)$ pour tout x de J.

20 **Soit g la fonction définie sur : $]-\infty,2[$ par**
$g(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$.

1 • Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J qu'o doit déterminer

2 • Donner les tableaux de variations de g et de g^{-1}.

3 • Tracer les deux courbes C_g et $C_{g^{-1}}$.

4 • Calculer $g^{-1}(x)$ pour $x \in J$.

21 **Soit f une fonction définie sur l'intervalle $I = [-2,4]$ et f^{-1} sa fonction réciproque définie su $[-1,3]$.**

1 • Déterminer $f^{-1}(-1)$, $f^{-1}(0)$, $f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$, $f^{-1}(2)$ et $f^{-1}(3)$.

Sachant que : $f(-2) = -1$, $f(-1) = 0$, $f(1) = \frac{1}{2}$, $f(2) = 2$ et $f(4) = 3$.

2 • Le tableau ci-dessous est le tableau de variations de la fonction f sur $[-2,4]$.

x	-2	4
$f(x)$	-1 ↗	3

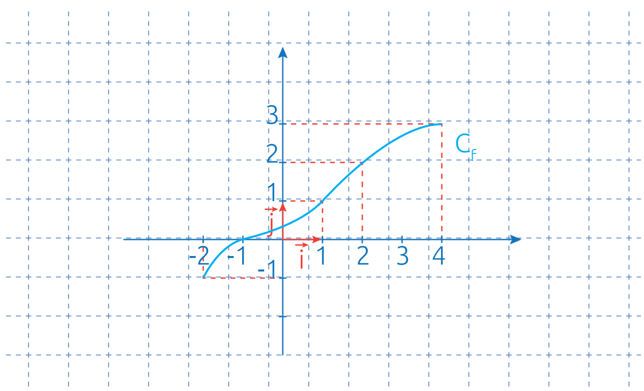
a. Donner le tableau de signe de f et le tableau de variations de f^{-1}.

b. Montrer que l'équation $f^{-1}(x) = 0$ admet une seule solution α dans $[-1,3]$.

c. Montrer que $0 < a < \frac{1}{2}$.

d. Donner un encadrement de α d'amplitude inférieur à $0,2$.

3 • La courbe ci-dessous représente C_f sur $[-2,4]$.



a. Donner le tableau de variations de f^{-1}.

b. Tracer $C_{f^{-1}}$.

22 **On considère la fonction f définie sur $]1,2[$ par**
$f(x) = \dfrac{1}{2-x} + \dfrac{1}{1-x}$.

1 • Calculer $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$.

2 •

a. Montrer que f est continue sur $]1,2[$.

b. Montrer que f est strictement croissante sur $]1,2[$.

c. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution α dans $]1,2[$.

d. Déterminer la valeur de α .

3 • Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur intervalle J qu'on doit déterminer.

4 • Calculer $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

23 Coronavirus : covid - 19 au Maroc

Le ministère de la santé a annoncé que le nombre total des cas d'infection enregistrés le mardi 29/08/2021 est 849 532 ; ce nombre total des cas d'infection est passé à 886 008 le lundi 06/09/2021 à 18h .

• **Calculer** le taux d'évolution moyen quotidienne du nombre des cas d'infection au Maroc entre 29/08/2021 et 06/09/2021.

24 Soit f la fonction définie par

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 + 3x} - 2}{x - 1} & x > 1 \\ f(x) = x^2 + x - \dfrac{5}{4} & x \leqslant 1 \end{cases}$$

• **Montrer** que f est continue sur $\mathbb{R}$.

25 Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x^3 - 3x - 1$.

1 • Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.

2 • Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}$.

3 •

a. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 3(x^2 - 1)$

b. Donner le tableau de variations de f .

4 • Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet trois solutions a , b et c dans $\mathbb{R}$.

5 • Donner le tableau de signe de f dans $\mathbb{R}$.

Exercices d'approfondissement

26 Soit f la fonction définie sur $]-\infty,3]$ par $f(x) = x^2 - 6x - 3$

1 • Montrer que f est continue sur $]-\infty,3]$.

2 • Montrer que f est strictement décroissante sur $]-\infty,3]$.

3 • En déduire que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

4 • Dresser le tableau de variation de f^{-1} sur J .

5 • Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout x et J

27 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 + x + 2} - 2}{2 - x} \\ f(2) = \dfrac{-3}{4} \end{cases}, \ (x \neq 1)$$

1 • Vérifier que : $D_f = \mathbb{R}$.

2 • Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

3 • Montrer que f est continue en 2 .

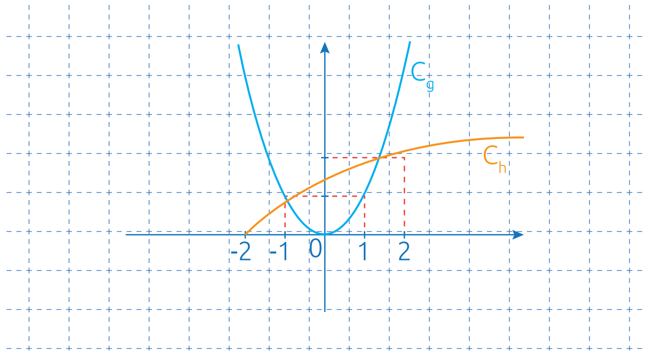
4 • Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

5 • Montrer que $\exists c \in]0,2[\ : \ f(c) = 0$.

28 On donne les représentations graphiques des deux fonctions : $g : x \longmapsto x^2$ et $h : x \longmapsto \sqrt{x+2}$. et soit f la fonction définie sur $[-2,0]$ par : $f(x) = x^2 - \sqrt{x+2}$.

1 • Par lecture graphique :

Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $[-2,0]$



2 • **Conjecturer** graphiquement la valeur de cette solution .

3 • **Justifier** que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $[-2, 0]$.

4 • **Valider** par le calcul la valeur de la solution déterminée précédemment par lecture graphique .

29 **Soit f la fonction définie par $f(x) = x + \sqrt{x+3}$.**

1 • **Justifier** que : $D_f = [-3, +\infty[$.

2 • **Calculer** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $f(1)$

3 • **Montrer** que f est continue sur $[-3, +\infty[$.

4 • **Montrer** que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J qu'on doit déterminer .

5 • **Calculer** $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

6 •

a. **Montrer** que l'équation $f(x) = f^{-1}(x)$ admet une seule solution α dans $[-3, +\infty[$.

b. **Montrer** que : $-3 < \alpha < -2$.

c. **Déterminer** un encadrement de α d'amplitude inférieure à $0,2$.

30 **On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :**
$f(x) = x^3 - 3x + 1$

1 • **Montrer** que f est continue sur $\mathbb{R}$

2 • **Montrer** que $f'(x) = 3(x^2 - 1)$.

3 • **Calculer** $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

4 • **Dresser** le tableau de variation de f .

5 • **Montrer** que la courbe (Cf) représentative de la fonction f coupe l'axe des abscisses 3 fois.

6 • Quel est le nombre de solutions de l'équation on $x^3 + 1 = 3x$ sur $[-1, 1]$

31 **On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :**
$f(x) = x^5 + x^3 - 2$

1 • **Justifier** que f est continue sur $\mathbb{R}$

2 •

a. **Montrer** que l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution α dans $\mathbb{R}$.

b. **Justifier** que : $0 < \alpha < 1$.

c. **Donner** le tableau de signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.

32 **On considère la fonction f définie sur $[-1, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x^3 - 3x^2 + 3x + 7}$.**

1 • **Montrer** que f est continue sur $[-1, +\infty[$.

2 • **Calculer** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

3 • **Montrer** que f est strictement croissante sur $[-1, +\infty[$.

4 • En déduire que f admet une fonction réciproque définie sur un intervalle J à déterminer .

33 **Soit m un réel strictement positif et f_m la fonction définie sur $[0, m]$ par $f_m(x) = \dfrac{m - x}{m(m + x)}$**

1 • **Montrer** que f_m est continue sur $[0, m]$.

2 •

a. **Montrer** que $f_m'(x) = \dfrac{-2}{(m+x)^2}$ pour tout x de $[0, m]$

b. En déduire que f_m est strictement décroissante sur $[0, m]$.

3 • **Montrer** que la fonction f_m admet une fonction réciproque f_m^{-1} définie sur l'intervalle $J = \left[0, \dfrac{1}{m}\right]$.

4 • **Montrer** que $\forall x \in \left[0, \dfrac{1}{m}\right]$ $f^{-1}{}_m(x) = f_{\frac{1}{m}}(x)$

34 **On considère la fonction g définie sur $[0, +\infty[$ par $g(x) = \dfrac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1}$.**

1 • **Montrer** que f est continue sur $[0, +\infty[$.

a. **Écrire** g comme composée de deux fonctions U et V définies sur $[0, +\infty[$.

b. **Montrer** que g est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

2 •

a. **Montrer** que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer .

b. **Calculer** $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

35 **Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par**

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{(1-x^2)^2} + \sqrt{(1-x^2)} - 2 & (x \leq 1) \\ f(x) = \dfrac{x^2-(1+a)x+a}{2x^2-3x+1} & (x > 1) \end{cases}.$$

1 • **Calculer** : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

2 • **Déterminer** la valeur de pour que f soit continue en 1 .

3 • On prend : $a = 3$.

a. **Montrer** que la fonction g définie par : $g(x) = f(x)$ pour tout $x > 1$ admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer .

b. **Calculer** $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

36 **On considère la fonction f définie par sur $[2, +\infty[$:**

$f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 5}$.

1 • **Vérifier** que : $\forall x \in \mathbb{R} : (x-2)^2 + 1 = x^2 - 4x + 5$.

2 • **Calculer** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

3 •

a. **Étudier** les variations de la fonction $u : x \mapsto (x-2)^2 + 1$ sur $[2, +\infty[$.

b. En déduire les variations de f sur $[2, +\infty[$.

4 • **Montrer** que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer .

5 • **Calculer** $f^{-1}(x)$ pour tout x de J .

37 **Une entreprise lance sur le marché un nouveau produit. La production est comprise entre 0 et 700 . Le bénéfice en milliers de dirhams pour x certaines de ce produit fabriqué et vendu est donné par $B(x) = -4x^3 + 9x^2 + 84x - 20$ avec $x \in [0, 7]$.**

1 • **Dresser** le tableau de variation de B sur $[0, 7]$.

2 • **Déterminer** le nombre de solution de l'équation $B(x) = 0$ sur $[0, 7]$.

3 • **Déterminer** une valeur approchée de chacune des solutions de l'équation $B(x) = 0$ à 10^{-2} .

4 • En déduire le signe de $B(x)$ sur $[0, 7]$.

5 • Pour quelles quantités de produits fabriqués et vendues l'entreprise réalise t-elle un bénéfice?

38 **Une municipalité à commencé l'installation d'une nouvelle piste de skateboard. Ce graphique modélise la partie de la piste installée.**

Cette piste ne doit pas avoir de coupure c'est à dire que l'on doit pouvoir la représenter ci-dessus sur l'intervalle $[0; 12]$ sans lever le crayon.

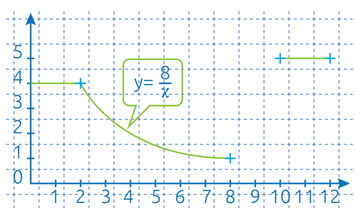
Lesquelles des équations de courbes données permettent de compléter la piste sur l'intervalle $[8; 10]$?

1 • $y = 2x - 15$

2 • $y = \dfrac{1}{64}x^2$

3 • $y = -\dfrac{160}{x} + 21$

4 • $y = 0,01x^3 - 5$



a. En fait les organisateurs souhaitent compléter la piste sur l'intervalle $[8; 10]$ par une courbe d'équation $y = a(x-8)^2 + b$. Déterminer les nombres réels a et b .

b. **Réaliser** le graphique ci-dessus et le compléter par la courbe obtenue à la question a.

c. **Écrire** l'expression de la fonction f ainsi représentée sur l'intervalle $[0; 12]$.

39

Partie 1 :

Soit g la fonction sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x)=\dfrac{x^3+3x+4}{x}$.

1 • **Montrer** que pour tout $x\in\mathbb{R}^*$ $g(x)=\dfrac{(x+1)(x^2-x+4)}{x}$

2 • **Dresser** le tableau de signe de $g(x)$.

Partie 2 :

On considère la fonction f définie par

$f(x)=x+1-\dfrac{3}{x}-\dfrac{2}{x^2}$.

1 • **Calculer** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} f(x)$, $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2 •

a. **Montrer** que pour tout $x\in\mathbb{R}^*$ $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$.

b. **Dresser** le tableau de variation de f .

3 • **Montrer** que la courbe (Cf) représentative de la fonction f ; coupe l'axe des abscisses en trois points d'abscisses respectifs α ; β et γ tel que $\alpha<-1<\beta<0<\gamma$.

4 • Soit h la restriction de f sur $]0,+\infty[$

a. **Montrer** que h admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur $\mathbb{R}$

b. **Déterminer** h^{-1} .

40

Partie 1 :

On considère la fonction g définie sur $[0,+\infty[$ par $g(x)=x^3+\sqrt{x}-2$

1 • **Montrer** que $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\dfrac{g(x)-g(0)}{x}$

2 • **Montrer** que pour tout x de $]0,+\infty[$ $g'(x)=3x^2+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

3 • **Calculer** $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ et dresser le tableau de variations de g .

4 • **Calculer** $g(1)$ puis en déduire le signe de $g(x)$ sur $[0,+\infty[$.

Partie 2 :

Soit g la fonction définie par $f(x)=x^2-\dfrac{4}{\sqrt{x}}+\dfrac{4}{x}$ et (Cf) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1 • **Déterminer** Df le domaine de définition de f .

2 • **Montrer** que $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x)=+\infty$, puis interpréter graphiquement le résultat.

3 • **Montrer** que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$ puis interpréter graphiquement les résultats obtenus.

4 •

a. **Montrer** que pour tout x de $]0,+\infty[$ $f'(x)=\dfrac{2g(x)}{x^3}$

b. En déduire que f est décroissante sur $]0,1]$.

c. **Dresser** le tableau de variation de f .

5 • **Montrer** que l'équation $f(x)=2$ admet deux solutions a et b dans $]0,+\infty[$ tel que $0<a<1<b$

6 • **Donner** un en cadrement de a d'amplitude $0,25$

7 • **Tracer** la courbe (Cf) .

8 • **On considère** h la restriction de f sur $]0,1]$

a. **Montrer** que h admet une fonction réciproque h^{-1} définit sur $J=[1,+\infty[$

b. **Comparer** $h^{-1}(0,00015)$ et $h^{-1}(0,2)$

c. **Dresser** le tableau de variations de h^{-1}

d. **Tracer** $(C_{h^{-1}})$ dans le même repère.

Cocher la ou les réponses justes :

	A	B	C
Pour les questions 1; 2 et 3, f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = x^2 + ax - \frac{1}{a}\ ;\ si\ x > 1 \\ f(x) = -x^2 + 2x\ ;\ si\ x \leqslant 1 \end{cases}$			
1 f est continue 1 si :	$a \neq 1$ ☐	$a = -3$ ☐	$a = 1$ ou $a = -1$ ☐
2 Si $a = -1$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ est :	$+\infty$ ☐	$-\infty$ ☐	0 ☐
3 L'équation $f(x) = 2$ admet une seule solution dans l'intervalle $]-\infty, 1]$	Vrai ☐	Faux ☐	Rien à dire ☐
4 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = \frac{2x^2 - 7x + 3}{x - 3}\ ;\ si\ x \neq 3 \\ f(3) = 5 \end{cases}$	f n'est pas continue 3 ☐	$\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 0$ ☐	f est continue 3 ☐

Pour les questions 5 - 6 - 7 - 8 - 9 et 10.

est une fonction continue sur $]-\infty, 1[$ et sur $]1, +\infty[$

Le tableau ci-contre et son tableau de variation :

x	$-\infty$		-3		0		1		3		6		$+\infty$
$g(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	-5	↗	2	↗	6

	A	B	C
5 $g(]-\infty, 0])$ est :	$]-\infty, 1]$ ☐	$]-\infty, 2]$ ☐	$[1, 2]$ ☐
6 $g(]-\infty, -3])$ est :	$]-\infty, 2]$ ☐	$[1, 2]$ ☐	$]-\infty, 1]$ ☐
7 $g(]1, 3])$ est :	$]+\infty, -5]$ ☐	$[-5, 2]$ ☐	$[-5, +\infty[$ ☐
8 L'équation $g(x) = 0$ admet une seule solution dans l'intervalle .	$]-\infty, 1]$ ☐	$]1, 6]$ ☐	$[0, 1[$ ☐
9 L'équation $g(x) = 3$ admet une seule solution dans l'intervalle .	$]-\infty, 1[$ ☐	$[6, +\infty[$ ☐	$]1, +\infty[$ ☐

AUTO - FORMATION

41 **Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par :**

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x - 1}\ ;\ si\ x > 0 \\ f(x) = x\sqrt[3]{1 + x^2}\ ,\ si\ x \leqslant 0 \end{cases}$$

1 • Montrer que f est continue en 0.

2 • En déduire que f est continue sur $\mathbb{R}$.

3 • Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$, puis interpréter graphiquement le résultat .

4 • Montrer que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$

5 • On considère la fonction g restriction de f sur l'intervalle $]1, +\infty[$. (c'est à dire $g = f$ sur $]1, +\infty[$

a. Montrer que pour tout $x \in]1, +\infty[$

$$g'(x) = \frac{-(x + 1)}{2(x - 1)^2\sqrt{x}}$$

b. Calculer $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} g(x)$ et dresser le tableau de variation de la fonction g sur $]1, +\infty[$

c. En déduire que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer

d. Déterminer $g^{-1}(x)$ pour tout x de J

Objectif Remédier aux difficultés liées à :
- Calcul de limite -théorème des valeurs intermédiaires.

Activités de remédiation aux difficultés	Remédiation	Critères et indicateurs
1 $\lim_{x\to1}\frac{3x^2-x+1}{x+1}=\lim_{x\to1}\frac{3x^2}{x}=3$	$\lim_{x\to1}3x^2-x+1=3$ et $\lim_{x\to1}x+1=2$ Donc $\lim_{x\to1}\frac{3x^2-x+1}{x+1}=\frac{3}{2}$	Il ne faut pas confondre la limite d'une fraction rationnelle en un réel avec la limite du fraction rationnelle en ∞
2 Si f continue et strictement monotonie sur un intervalle I alors l'équation $f(x)=0$ admet une seule solution dans I .	Pas toujours vraie . **Exemple :** $f : x \longmapsto x^2+1$ est une fonction continue et strictement croissante sur $[0,+\infty[$ mai l'équation $f(x)=0$ n'admet de solution dans $[0,+\infty[$.	La condition $O\in f(I)$ est une condition nécessaire pour que l'équation $f(x)=0$ admet une solution dans I
3 $\sqrt{x}\le x$ pour $x\ge0$	Pas toujours vraie $\sqrt{\frac{1}{16}}>\frac{1}{16}$	si $0\le x\le1$ alors $\sqrt{x}\le x$ pour tout et si $x\ge1$ alors $\sqrt{x}\ge x$

Auto-remédiation

Voir corrigé p 227

1

Soit f une fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x)=\frac{1-\sqrt{x}}{x-1} \ ; \ si\ x>1 \\ f(x)=-\frac{1}{2}x^2+x-1 \ , \ si\ x\leqslant 1 \end{cases}$$

1 • **Montrer** que f est continue en 1.

2 • **Calculer** $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ et $\lim_{x\to-\infty}f(x)$

3 • **Montrer** que pour tout $x>1$

$f'(x)=\frac{1}{2(1+\sqrt{x})^2\sqrt{x}}$

et pour tout $x<1$ $f'(x)=-x+1$

4 • **Dresser** le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

5 • Soit g la restriction de f sur $]1,+\infty[$.

a. Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J , à déterminer .

b. Dresser le tableau de variation de g^{-1} .

c. Montrer que pour tout x de $\left]-\frac{1}{2},0\right[$

$g^{-1}(x)=1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}$.

BERNARD BOLZANO
(1781 - 1850)

Évasion culturelle

En mathématiques, le théorème des valeurs intermédiaires (abrégé en TVI 1), parfois appelé théorème de Bolzano 2, est un résultat important en analyse et concerne des fonctions continues sur un intervalle. Il indique que si une fonction continue sur un intervalle prend deux valeurs m et n, alors elle prend toutes les valeurs intermédiaires entre m et n .

Ce théorème donne dans certains cas l'existence de solutions d'équations et est à la base de techniques de résolutions approchées comme la recherche dichotomique ou la bissection.