Programme Marocain - BIOF

1 BAC
Sc.expérimentales
Sc.Techniques

ETINCELLE MATHS

Manuel de l'élève

Auteurs

HASSAN KHALKALLAH
Professeur de maths
Cycle secondaire qualifiant
(Coordinateur)

MOHAMED RAHNAOUI
Ex. Inspecteur principal
de l'enseignement secondaire

MOHAMED MOUSSADDAR
Professeur de maths
Cycle secondaire qualifiant

SALAH DIOUA
Professeur de maths
Cycle secondaire qualifiant

Outils et fiches ressources

N°	Chapitre	Contenus du programme	Compétences	Prolongements
1	**Notion de logique**	• Propositions ; opérations sur les propositions ; fonctions propositionnelles les quantificateurs . • Les raisonnements mathématiques : raisonnement par l'absurde ; raisonnement par contraposée; • Raisonnement par disjonction des cas raisonnement par équivalence ; raisonnement par récurrence.	• Utiliser le type de raisonnement convenable selon la situation étudiée • Rédiger des raisonnements et des démonstrations mathématiques claires et logiquement correctes.	• Ensembles et applications. • En général rédiger des raisonnements et démonstrations mathématiques logiquement correctes.
2	**Généralités sur les fonctions**	• Fonction majorée ; fonction minorée ; fonction bornée ; fonction périodique ; • Comparaison de deux fonctions ; interprétation géométrique ; • Extremums d'une fonction ; • Monotonie de fonction. • Composée de deux fonctions numériques ; • Monotonie de la composée de deux fonctions numériques monotones ; • Représentation graphique des fonctions : $x \to \sqrt{x+a}$ et $x \to ax^3$.	• Comparer deux expressions en utilisant différentes techniques. • Déduire les variations d'une fonction ou les valeurs maximales et minimales d'une fonction à partir de sa représentation graphique ou à partir de son tableau de variation • Reconnaître les variations des fonctions $f+\lambda$ et λf à partir des variations de la fonction f Utiliser la courbe représentative ou le tableau de variations d'une fonction pour déterminer l'image d'un intervalle et résoudre des équations et des inéquations Déterminer les variations de gof à partir de celles de f et g.	• Étudier une fonction : variation, tangentes , extremums ,etc. • Représentation graphique d'une fonction. • Modéliser une situation avec une fonction.
3	**Suites numériques**	• Suites numériques : • Suites récurrentes • Suites majorées ; suites minorées ; suites bornées • Monotonies d'une suite • Suites arithmétiques; suites géométriques.	• Utiliser le Raisonnement par récurrence • Étudier une suite numérique (majoration, minoration, monotonie) • Reconnaître une suite arithmétique ou géométrique et déterminer sa raison et son premier terme • Calculer la somme de n termes consécutifs d'une suite arithmétique ou géométrique • Reconnaître une situation de suite arithmétique ou géométrique • Utiliser une suite arithmétique ou géométrique pour résoudre des problèmes.	• Étudier la limite d'une suite. • Modélisation des phénomènes physique-chimie , SVT et Économie avec des suites .
4	**Barycentre dans le plan**	• Barycentre de n points ($2 \leq n \leq 4$); centre de gravité ; • Propriété caractéristique du barycentre ; invariance ; associativité ; • Coordonnées du barycentre dans un repère donné.	• Utiliser le barycentre pour simplifier des expressions vectorielles • Construire le barycentre de n points $2 \leq n \leq 4$ • Utiliser le barycentre pour montrer l'alignement de trois points du plan. • Utiliser le barycentre pour montrer l'intersection de droites ; • Utiliser le barycentre pour résoudre des problèmes de géométrie et de physique.	• Utilisation de la notion de barycentre à la détermination de lieu de points défini par une relation scalaire particulière. • Barycentre dans l'espace. • Outils mathématiques pour la physique.

5	**Produit scalaire dans le plan**	• Expression analytique du produit scalaire dans un repère orthonormé : Expression analytique de la norme d'un vecteur et de la distance de deux points ; Expression de $\cos\theta$ et de $\sin\theta$. • La droite dans le plan (Étude analytique) : Vecteur normal à une droite ; équation cartésienne d'une droite définie par un point et un vecteur normal à cette droite ; Distance d'un point à une droite. • Le cercle (étude analytique : équation cartésienne d'un cercle ; représentation paramétrique d'un cercle ; étude de l'ensemble des points : $\{M(x;y)\in(P) / x^2+y^2+ax+by+c=0\}$ • Étude des positions relatives d'un cercle et d'une droite • Équation cartésienne d'une droite tangente à un cercle en un point donné de ce cercle.	• Exprimer le parallélisme et l'orthogonalité de deux droites Calculer les mesures des angles et calculer des aires. • Reconnaître l'ensemble des points M du plan vérifiant la relation : $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$ • Déterminer le centre et le rayon d'un cercle défini par son équation cartésienne • Passer d'une équation cartésienne à une représentation paramétrique et inversement • Utiliser l'analytique du produit scalaire pour résoudre des problèmes géométriques et algébriques	• Trigonométrie : Formules de transformations. • Résoudre des problèmes d'orthogonalité dans l'espace. • En physique :Travail d'une force, décomposition d'une force , etc.
6	**Calcul trigonométrique**	• Formules de transformations • Transformation de l'expression : $a\cos x + b\sin x$	• Maîtriser les différentes formules de transformation • Résoudre des équations et des inéquations trigonométriques se ramenant à la résolution d'équations et d'inéquations fondamentales • Représenter et lire les solutions d'une équation ou d'une inéquation sur le cercle trigonométrique.	• Étudier les nombres complexes. • L'outil mathématique pour étudier les phénomènes vibratoires.
7	**Rotation**	• Définition d'une rotation, rotation réciproque d'une rotation ; • Conservation de la distance, de la mesure d'un angle orienté et du barycentre ; • L'image par une rotation d'une droite, d'un segment et d'un cercle.	• Construire les images des figures usuelles par une rotation donnée • Reconnaître l'isométrie de figures en utilisant la rotation Utiliser une rotation donnée dans une situation géométrique simple.	• Expression complexe d'une rotation. • En physique : étude des corps en rotation.
8	**Limite d'une fonction numérique**	• Limite des fonctions : $x\to x^2$; $x\to x^3$; $x\to x^n$ et $x\to\sqrt{x}$ et leurs inverses en 0, en $+\infty$ et en $-\infty$ • Limite finie et limite infinie en un point ; • Limite finie et limite infinie en $+\infty$ et en $-\infty$. • Opérations sur les limites ; • Limite à gauche ; limite à droite ; • Limites de fonctions polynomiales ; rationnelles et limites de $\sqrt{f}$, f étant une fonction usuelle . • Les limites : $x\to\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin(ax)}{x}$; $x\to\lim\limits_{x\to0}\frac{Tan(ax)}{x}$ et $x\to\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}$ • Limites et ordre.	• Calculer les limites des fonctions polynômes, des fonctions rationnelles et des fonctions irrationnelles • Calculer les limites des fonctions trigonométriques simples en utilisant les limites usuelles.	• Calculer les limites d'une suite. • Étudier la continuité en un point. • Calcul du nombre dérivé. • Étude et représentation graphique d'une fonction.

9/ 10	**- Dérivation** **- Représentation graphique d'une fonction numérique**	• Dérivabilité en un point ; nombre dérivé interprétation géométrique ; tangente à une courbe ; approximation affine d'une fonction en un point . • Dérivabilité à gauche ; dérivabilité à droite ; interprétation géométrique ; demi tangente; tangente ou demi tangente verticales . • Dérivabilité sur un intervalle ; dérivée première ; dérivée seconde ; dérivées successives. • Dérivée de : $f+g$; kf ; fg ; $\frac{f}{g}$ et $f^n\,(n \in N^*)$; $f(ax+b)$ et $\sqrt{f}$ • Monotonie d'une fonction et le signe de sa dérivée ; extremum d'une fonction dérivable sur un intervalle. • Équation différentielle : $y'' + \omega^2 y = 0$ .. • Branches infinies ; droites asymptotes ; direction asymptotique . • Point d'inflexion ; concavité d'une courbe • Éléments de symétrie de la courbe d'une fonction.	• Reconnaître que le nombre dérivé de la fonction en a est le coefficient directeur de la tangente à cette courbe au point d'abscisse a . • Déterminer une équation de la tangente à une courbe en un point et construire cette tangente • Approcher une fonction au voisinage d'un point a. • Reconnaître les dérivées des fonctions de référence • Maîtriser les techniques de calcul de la dérivée de fonctions • Déterminer la monotonie d'une fonction à partir de l'étude du signe de sa dérivée • Déterminer e signe d'une fonction à partir de son tableau de variation ou de sa courbe représentative • Résoudre des problèmes concernant des valeurs minimales et des valeurs maximales. • Résoudre graphiquement des équations et des inéquations Utiliser la périodicité et les éléments de symétrie d'une courbe pour réduire le domaine d'étude d'une fonction. • Utiliser le signe de la dérivée seconde pour étudier la concavité d'une courbe et déterminer ses points d'inflexion Étudier et représenter des fonctions polynômes, des fonctions rationnelles et des fonctions irrationnelles • Étudier et représenter des fonctions trigonométriques simples.	• Dériver une fonction en utilisant les propriétés des opérations sur les fonctions dérivables. • Primitive et Calcul d'intégrale. • Résoudre les problèmes de l'optimisation. • Équations différentielle. • Modélisation d'un problème en économie , en physique en SVT, etc.
11/ 12	**- Vecteurs de l'espace** **- Géométrie analytique dans l'espace**	• Calcul vectoriel dans l'espace . • Vecteurs colinéaires ; définition vectorielle d'une droite ;définition vectorielle d'un plan . • Vecteurs coplanaires . • Coordonnées d'un point dans un repère, coordonnées d'un vecteur dans une base ; coordonnées de $a\vec{u} + b\vec{v}$ et de $\overrightarrow{AB}$. • Déterminant de trois vecteurs ; • Représentation paramétrique d'une droite ; positions relatives de deux droites . • Représentation paramétrique d'un plan • Équation cartésienne d'un plan ; positions relatives de deux plans . • Deux équations cartésiennes d'une droite • Positions relatives d'une droite et d'un plan.	• Maîtriser les règles du calcul vectoriel dans l'espace ; • Reconnaître et exprimer la colinéarité de deux vecteurs ; • Reconnaître et exprimer la coplanarité de trois vecteurs ; • Appliquer l'alignement et la coplanarité pour résoudre des problèmes géométriques. • Exprimer les notions et les propriétés de la géométrie affine et de la géométrie vectorielle à l'aide des coordonnées • Montrer la colinéarité de deux vecteurs. • Montrer la coplanarité de trois vecteurs • Choisir la représentation convenable (cartésienne ou paramétrique) pour étudier les positions relatives de droites et de plans, et pour interpréter les résultats.	• Produit scalaire dans l'espace. • Produit vectoriel.

LEÇON 1

Notion de logique

Compétences visées

- Transformer un énoncé mathématique en écriture symbolique en utilisant les connecteurs et les quantificateurs logiques et inversement.
- Utiliser le type de raisonnement convenable selon la situation étudiée.
- Rédiger des raisonnements et des démonstrations mathématiques claires et logiquement correctes.

Prérequis

- Parité d'un entier naturel.
- Divisibilité dans IN.
- Ensembles IN, IZ, IQ et IR.
- Ordre dans IR.

Prolongements

- Ensembles et applications.
- En général rédiger des raisonnements et démonstrations mathématiques logiquement correctes.

JE VÉRIFIE MES ACQUIS

Dans chacun des cas suivants indiquer la bonne réponse :

	A	B	C
1 Le nombre $2n^2 + 4n + 1$ $(n \in \mathbb{N})$ est :	Pair	Impair	Somme de 3 carrés
2 $\sqrt{3}$ est un :	Nombre rationnel	Un entier naturel	Un nombre irrationnel
3 L'expression $x^2 + 1 \geq 2x$ $(x \in \mathbb{R})$ est :	Vraie	Fausse	N'a pas de sens
4 L'équation $x^2 - x + 1 = 0$ admet :	2 solutions	Pas de solutions	Une seule solution
5 $\sqrt{5}$ est solution de l'équation	$x^2 - \sqrt{5} = 0$	$x^2 - 5 = 0$	$x^2 + 5 = 0$
6 La somme de deux nombres impairs est un nombre :	Pair	Impair	Premier
7 Le double d'un nombre irrationnel est un nombre	Entier	Rationnel	Irrationnel
8 135 est divisible par 3	Faux	On ne sait pas	Vrai
9 $\sqrt{2} + \sqrt{3} > \sqrt{5}$	Vrai	Faux	On ne peut pas conclure
10 L'ensemble $\mathbb{Z}$ est l'ensemble :	Des entiers relatifs	Des entiers naturels	Des entiers rationnels

1 On considère les énoncés suivants :

Tout nombre pair est divisible par 2;

$\sqrt{3} \in \mathbb{N}$;

deux droites orthogonales se coupent en un point ;

$\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{5}$;

et $\pi \in Q$.

1 • **Recopier** les énoncés (ci-dessous) et mettre un V devant chacun des énoncés "vrai" et un F devant chacun des énoncés "faux".

2 • **Donner** d'autres exemples des énoncés qui peuvent être vrais ou bien faux.

A retenir : chaque énoncé qui peut être ou bien "vrai" ou bien "faux" est appelé une proposition et les valeurs V et F sont appelées les valeurs de vérité.

2 Recopier les énoncés suivants et mettre à la place des pointillés l'un des liens suivants "ou" ou bien "et"

1 • $x^2 - 4 = 0$ signifie $x = 2$......$x = -2$

2 • $ABCD$ est un parallélogramme signifie $AB = DC$......$AD = BC$

3 • Soient a et b deux réels on a $|a - b| = a - b$...$|a - b| = b - a$

4 • Soient $x \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}^+$ on a : $x^2 = a$ signifie $x = \sqrt{a}$......$x = -\sqrt{a}$

5 • Deux droites (D) et (Δ) sont parallèles dans le plan signifie que (D) et (Δ) sont disjoints…confondues

6 • $|x| = 4$ signifie $x = 4$......$x = -4$

3 Le professeur de mathématique Madame Asmaa a donné à ses élèves le tableau suivant :

Recopier et compléter le tableau ci-dessous.

	Énoncé	Valeur de vérité de l'énoncé	la négation de l'énoncé
1	$\sqrt{2} \in Q$		
2	$\lvert x + y \rvert \leq \lvert x \rvert + \lvert y \rvert$		
3	$a \in \mathbb{R}: \sqrt{a^2} \geq a$		
4	$\sqrt{7} = \sqrt{3} + \sqrt{4}$		
5	Le nombre 425625 est un multiple de 25		

4 **Déterminer, parmi les énoncés suivants ceux qui sont vrais.**

1 • Si ABC est un triangle alors $AB + BC > AC$.

2 • Si ABC est un triangle alors les points A, B et C sont alignés.

3 • Si $\sqrt{5}$ est nombre rationnel alors 5 est un carré parfait.

5 **Soit** $n \in \mathbb{N}^*$

On considère l'expression $A(n) = n^2 - 7n + 6$.

1 • **Calculer** $A(1)$, $A(2)$, $A(3)$, $A(4)$, $A(5)$ et $A(6)$.

2 • Est ce qu'on peut dire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

On a $A(n) \leq 0$

3 • **Calculer** $A(7)$.

4 • L'énoncé suivant est-il vrai ou faux : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $A(n) \leq 0$.

Remarque :

La valeur 7 est appelée un contre exemple.

6

1 • Que peut on dire de l'énonce pour tout $x \in \mathbb{R}$ $x^2 < 0$.

2 • Soit $a \in \mathbb{R}^*$ supposons que $a + \dfrac{1}{a} < 2$ montrer que $(a-1)^2 < 0$.

3 • Que peut on conclure ?

7

1 • **Vérifier** que : $2^3 > 3$

2 • Soit $n \in \mathbb{N}^*$

Montrer que :

Si $2^n \geq n$ alors $2^{n+1} \geq n + 1$

3 • En déduire que sans faire de calcul $2^4 > 4$ et $2^5 > 5$ et $2^6 > 6$.

4 • **Donner** la valeur de vérité de l'énonce pour tout entier naturel $n \geq 3$: $2^n \geq n$ (Justifier ta réponse).

I Proposition ou assertion

1.1. Définition :

- Une proposition ou une assertion est un énoncé mathématique qui a un sens qui est soit vrai soit faux
- Une proposition est notée par : $p, q, s, r\dots$
- On affecte a une proposition vraie le nombre 1 ou la lettre V et on affecte a une proposition fausse le nombre O ou la lettre F

V et F sont appelées les valeurs de vérités

Table de vérité de P

P	V	F

Exemple

p: 2 est un nombre pair V ;

$q: 2 + 7 \neq 9$ F

x est un nombre impaire, cette phrase ne représente pas une proposition.

1.2. Fonction propositionnelle.

- Une fonction propositionnelle est un énoncé mathématique dépendant d'une (ou de plusieurs) variables appartenant à un ensemble E, sa valeur de vérité dépend de la variable ou des variables de E.

  On note une fonction propositionnelle par $P(x)$, $A(x,y)$

Exemple

$p(x): x \in \mathbb{R}^* / x^2 \geq x$.

$Q(x,y): (x,y) \in \mathbb{R}^2$; $x^2 + y^2 \geq 6xy$.

II Les connecteurs logiques

2.1. Négation d'une proposition

Soit p une proposition

La négation de p est la proposition noté $\overline{p}$ ou non (p) qui est vraie si p est fausse et fausse si p est vraie

La table de vérité de $\overline{p}$

p	$\overline{p}$
1	0
0	1

Exemple

$p : 2 > \sqrt{2}$; (1)

$\overline{P} : 2 \leq \sqrt{2}$; (0)

q : 4 ne divise pas 116 ; (0)

$\overline{q}$ 116 est divisible par 4 ; (1)

2.2. Conjonction

La conjonction des deux propositions p et q est la proposition noté $p \wedge q$ ou (p et q) définie par la table de vérité ci-contre

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Remarque :

La proposition $p \wedge q$ est vraie si p et q sont à la fois vraies.

Exemples

(3 est impaire) et ($\sqrt{3} \notin Q$) : (1) ; $2 + 4 + 6 = 3 \times 4$ et $3 \times 4 \neq 12$: (0)

2.3. Disjonction

La disjonction des deux propositions p et q est la proposition noté $p \vee q$ ou (p au q) définie par la table de vérité ci-dessous

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Remarque :

La proposition $p \vee q$ est fausse si les deux propositions p et q sont simultanément fausse .

Exemple

$9 + 6 = 15$ ou $\frac{1}{3} > \frac{1}{2}$: (1) . $\sqrt{5} \in \mathbb{N}$ ou $\sqrt{9} = -3$: (0)

2.4. Implication

REMARQUE

- Pour montrer que $p \Rightarrow q$ est vraie, on doit supposons que p est vraie et monter que q est vraie

L'implication des deux propositions p et q dans cet ordre est la proposition noté $p \Rightarrow q$ et se lit p implique q définie par la table de vérité ci dessous

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Remarque :

La proposition $p \Rightarrow q$ est fausse uniquement si p est vraie et q est fausse.

Exemple

$x > 1 \Rightarrow x^2 > x$: (1); 4 est un nombre pair $\Rightarrow \frac{1}{4} \in N$: (0); $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{5} \Rightarrow$ 5 est premier : (1)

2.5. Équivalence

L'équivalence des deux propositions p et q est la proposition noté $p \Longleftrightarrow q$ et on lit p équivalent a q ou p si et seulement si q définie par la table de vérité suivante :

p	q	$p \Longleftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Remarque :

La proposition $p \Longleftrightarrow q$ est vraie si p et q ont simultanément la même valeur de vérité .

Exemple

$\sqrt{3^2+4^2}=7 \Leftrightarrow 7$ est impair : (0) $\quad$ $5>2 \Leftrightarrow 2+3=5$: (1) $\quad$ $\sqrt{2}>\sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{16}=-4$: (1)

III Les quantificateurs.

il y a deux quantificateurs, le quantificateur universel, noté $\forall$ et se lit quelque soit ou pour tout et le quantificateur existentiel noté $\exists$ et se lit il existe au moins : on a $(\forall x \in E): P(x)$ quelque soit x de E on a : $P(x)$ et $\exists x \in E: P(x)$ il existe au moins un x de E tel que : $P(x)$.

Exemple

$\forall x \in \mathbb{R}: x^2 \geq 0$ $\quad$ $\exists x \in \mathbb{R}/x^2-3x+2=0$ $\quad$ $\exists! x \in \mathbb{R}\ \ x^2-4x+4=0$

Remarque :

- $\exists!$ Se lit il existe un et un seul
- On peut permuter des quantificateurs de même nature mais on ne peut pas permuter des quantificateurs de natures différentes
- La négation de : $(\forall x \in E): P(x)$ est : $\exists x \in E: \overline{P(x)}$ et la négation de : $(\exists x \in E): P(x)$ est : $(\forall x \in E): \overline{P(x)}$

Exemple

p : $\forall n \in \mathbb{N}^* /\ n^2 \geq n$ $\quad$ q : $\exists x \in \mathbb{R}/x^2+1>x$

$\overline{p}$: $\exists n \in \mathbb{N}^* /\ n^2 < n$ $\quad$ $\overline{q}$: $\forall x \in \mathbb{R}/x^2+1 \leq x$

IV Les lois logiques ou tautologies.

Définition :

Une loi logique est une proposition formée de plusieurs propositions p, q, r... liées entre elles par des connecteurs logiques et qui est toujours vraie quelque soit la valeur de vérité des propositions p, q, r

Exemple

Montrer que $p \Rightarrow q \Longleftrightarrow \overline{p}$ ou q est une loi logique.

p	q	$\overline{p}$	$p \Rightarrow q$	$\overline{p}$ ou q	$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \overline{p}$ ou q
1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	0	1
0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1

D'après la table de vérité précédente on a :
$(p \Rightarrow q) \iff (\overline{p} ou\, q)$ est toujours vraie donc c'est une loi logique.

Propriété :

Les propositions suivantes sont des lois logiques :
• $(p \Rightarrow q) \iff (\overline{p}\ ou\ q)$ • $(p \Rightarrow q) \iff (\overline{q} \Rightarrow \overline{p})$ • $(\overline{p\ et\ q}) \iff (\overline{p}\ ou\ \overline{q})$ • $(\overline{p\ ou\ q}) \iff (\overline{p}\ et\ \overline{q})$

V Les types de raisonnements.

5.1. Raisonnement par contre exemple.

Pour montrer que : $\forall x \in \mathbb{R} : P(x)$ est fausse, il faut est il suffit de montrer que sa négation est vraie c'est à dire : $\exists x_0 \in \mathbb{R}/\overline{P(x_0)}$ est vraie le réel x_0 est appelé "contre exemple".

Exemple

• **Montrer que la proposition suivante est fausse.**

$\forall x \in \mathbb{R}\ \ x^2 - 5x + 4 > 0$ Il suffit de prendre $x_0 = 2$ on a : $2^2 - 5 \times 2 + 4 = -2 < 0$

5.2. Le raisonnement par équivalences successives.

Propriété :

On a : $(p \Leftrightarrow q \Leftrightarrow r) \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow r)$ est une loi logique.

Exemple

• **Soit** $x > 0$ **montrer que** $x + \frac{1}{x} \geq 2$

On a $x + \frac{1}{x} \geq 2 \iff \frac{x^2+1}{x} \geq 2$

$\iff x^2 + 1 \geq 2x$ Car $x > 0$ $\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 \geq 0$ $\iff (x-1)^2 \geq 0$

Et comme $(x-1)^2 \geq 0$ est vraie pour tout $x \in \mathbb{R}^{*+}$

Alors $x + \frac{1}{x} \geq 2$ est aussi vraie $\forall x >\in \mathbb{R}^*$.

Remarque :

Si $p \iff r$ est vraie et r est vraie alors p est vraie

5.3. Le raisonnement par disjonction de cas.

Rappel :

Soit E un ensemble non vide et ACE on note par $\overline{A}$ le complémentaire de A dans E c'est à dire $\overline{A} = \{x \in E/x \notin A\}$.

• Pour montrer qu'une propriété $P(x)$ est vraie pour tout x de E.
Il faut et suffit de montrer que $P(x)$ est vraie pour tout x de A et de montrer que $P(x)$ et vraie pour tout x de $\overline{A}$. on peut aussi décomposer E en plusieurs parties disjoints deux à deux et dont la réunion de toutes les parties est égale à E.

Exemple

Soit $n \in \mathbb{N}$ montrer que $n^2 + n$ est pair

Réponse :

on peut distinguer deux cas n pair et n impair si n est pair alors $n = 2k$ avec $k \in \mathbb{N}$ et on a :
$n^2 + n = (2k)^2 + 2k = 4k^2 + 2k$

$n^2 + n = 2(2k^2 + k)$ et $2k^2 + k \in \mathbb{N}$ donc $n^2 + n$ est pair

Si n est impair on a $n = 2k + 1$ avec $k \in \mathbb{N}$

et $n^2 + n = (2k+1)^2 + 2k + 1 = 4k^2 + 6k + 2 = 2(2k^2 + 3k + 1)$ et $2k^2 + 3k + 1 \in \mathbb{N}$

Donc $n^2 + n$ est pair.

5.4. Le raisonnement par l'absurde

Remarque :

D'après la table de vérité de l'implication on a $V \Rightarrow F$ est une proposition fausse donc si $\overline{P} \Rightarrow Q$ est vraie et si Q est fausse alors $\overline{P}$ sera forcement fausse donc P est vraie.

- Donc pour montrer qu'une proposition p est vraie on suppose que $\overline{P}$ est vraie et on montre que $\overline{P} \Rightarrow Q$ avec Q est une proposition fausse. On conclut que p est vraie.

Exemple

Soit $a \notin Q$ montrer que $2 + a \notin Q$

Réponse :

Supposons que $2 + a \in Q$ donc il existe $b \in Q \,/\, 2 + a = b$

donc $a = b - 2$ et comme $2 \in Q$ et $b \in Q$ alors $a = b - 2 \in Q$ ce qui est absurde puis que $a \notin Q$ donc $2 + a \notin Q$

5.5. Le raisonnement par contraposée

Propriété :

On a $p \Rightarrow q \Longleftrightarrow \overline{q} \Rightarrow \overline{p}$ est une loi logique donc :
Pour montrer que $p \Rightarrow q$ est vraie il faut et il suffit de montrer que $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$ est vraie

Exemple

Soit a et b deux réels tels que $b \neq 0$ et $a + 2b \neq 0$ **montre** que $\frac{a}{b} \neq -3 \Rightarrow \frac{a-2b}{a+2b} \neq 5$

Supposons que $\frac{a-2b}{a+2b} = 5$

$\Rightarrow a - 2b = 5a + 1ab \Rightarrow -4a = 12b \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{12}{-4} = -3$, D'où $\frac{a}{b} \neq -3 \Rightarrow \frac{a-2b}{a+2b} \neq 5$

5.6. Le raisonnement par récurrence

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$, La propriété $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0 \Longleftrightarrow \begin{cases} P(n_0) \text{ est vraie} \\ \text{et pour } n \geq n_0 \\ \text{on a : } P(n) \Rightarrow P(n+1) \text{ est vraie} \end{cases}$

Exemple

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad n(n+1)$ est un nombre pair

- Pour $n = 0$ on a $n(n+1) = 0$ vraie

Soit $n \in N$, supposons que : $n(n+1)$ est paire et montrons que : $(n+1)(n+2)$ est paire.

On a : $(n+1)(n+2) = n(n+1) + 2(n+1)$ somme de deux nombres paires est paires

et par suite $\forall n \in \mathbb{N} \quad n(n+1)$ est un nombre paire.

REMARQUE

Pour montrer $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ on doit supposer que $P(n)$ est vraie et montrer que $P(n+1)$ est vraie

LEXIQUE

- **Absurde :** خلف
- **Négation :** نفي
- **Contraposée :** مضاد للعكس

1 Valeur de vérité

Donner la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes

1 • $2+4+6+8=4\times 5$.

2 • 425 est divisible par 25.

3 • $a^2+b^2=(a+b)^2$.

4 • $\mathbb{N}$ est un ensemble fini.

5 • $\sqrt{5}\leq\sqrt{2}+\sqrt{3}$.

6 • Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.

7 • Tout les nombres pairs sont divisibles par 4.

Réponses :

1	2	3	4	5	6	7
V	V	F	F	V	V	F

2 Négation

Nier les propositions suivantes

$P_1 : \exists x\in\mathbb{R}\ \ x^2-7x+12=0$.

$P_2 : \forall x\in\mathbb{R}\ \ x^2+1>0$.

$P_3 : (\forall x\in\mathbb{R})(\exists y\in\mathbb{R})/xy=1$.

$P_4 : \forall x\in\mathbb{R}\ \ \forall y\in\mathbb{R}\ \ x^2+y^2\neq 1$.

$P_5 : \forall x\in\mathbb{R}\ \ 2<x<5$.

$p_6 : \forall x\in\mathbb{R}^+\exists p\in\mathbb{N}/p\leq x<p+1$.

$p_7 : \forall n\in\mathbb{N}\ \ \exists m\in\mathbb{N}/m=4n$.

Réponses :

On a :

$\overline{P_1} : \forall x\in\mathbb{R} : x^2-7x+12\neq 0$

$\overline{P_2} : \exists x\in\mathbb{R} : x^2+1\leq 0$

$\overline{P_3} : \exists x\in\mathbb{R}\ \ \forall y\in\mathbb{R}\ \ xy\neq 1$

$\overline{P_4} : \exists x\in\mathbb{R}\ \ \exists y\in\mathbb{R}/x^2+y^2=1$

$\overline{P_5} : \exists x\in\mathbb{R}/x\leq 2$ ou $x\geq 5$

$\overline{P_6} : \exists x\in\mathbb{R}^+\ \ \forall p\in\mathbb{N} : x<p$ ou $x\geq p+1$

$\overline{P_7} : \exists n\in\mathbb{N}\ \ \forall m\in\mathbb{N} : m\neq 4n$

3 Les quantificateurs

Écrire à l'aide des quantificateurs les propositions suivantes.

P : il existe au moins un réel m tel que pour tout x de $\mathbb{R}$ on a $m\leq x$

q : Pour tout réel m il existe au moins un réel x tel que $x^2-mx-m^2=0$

r : Il existe un réel e, pour tout x de $\mathbb{R}$ on a $n+e-xe=x$

Réponses :

$P : \exists m\in\mathbb{R}/\forall x\in\mathbb{R}\ \ m\leq x$

$q : \forall m\in\mathbb{R}\ \ \exists x\in\mathbb{R}/x^2=mx-m^2=0$

$r : \exists e\in\mathbb{R}\ \ \forall x\in\mathbb{R}\ \ x+e-xe=x$

4 Raisonnement par contre exemple

Montrer par un contre exemple que la propositions suivantes est fausse.

1 • $\forall p\in\mathbb{N}^*\ \ p^2+2p+3$ est premier

Réponses :

1 • Pour $p=1$ on a $p^2+2p+3=6$ et 6 est non premier donc la proposition : $\forall p\in\mathbb{N}^*\ \ p^2+2p+3$ est premier est fausse.

5 Raisonnement par contraposée

1 • Soient x et y deux réels montrer que : $x+y>c\Rightarrow 2x>c$ ou $2y>c$

Réponses :

On sait que $(p\Rightarrow q)\Longleftrightarrow(\overline{q}\Rightarrow\overline{p})$.

1 • On a :

Non $(2x>c$ ou $2y>c)\Rightarrow 2x\leq c$ et $2y\leq c$

$\Rightarrow 2x+2y\leq c+c$.

$\Rightarrow 2(x+y)\leq 2c$.

$\Rightarrow x+y\leq c$.

$\Rightarrow$ Non $(x+y>c)$.

D'où $x+y>c\Rightarrow 2x>c$ ou $2y>c$.

6 Raisonnement par disjonction des cas

1 • Soit $n\in\mathbb{N}$
montrer que $n(n+1)(n+2)$ est divisible par 3

Réponses :

1 • Raisonnons par disjonction de cas :

1er cas : $n = 3k(k \in \mathbb{N})$

Donc $n(n+1)(n+2) = 3k(3k+1)(3k+2) \ = 3h$

Avec $h = k(3k+1)(3k+2) \in \mathbb{N}$

Donc $n(n+1)(n+2)$ est divisible par 3.

2ème cas : $n = 3k+1(k \in \mathbb{N})$

On a : $n(n+1)(n+2) = (3k+1)(3k+2)(3k+3)$

$= 3(3k+1)(3k+2)(k+1)$

$= 3h$

Avec $h = (3k+1)(3k+2)(k+1) \in \mathbb{N}$

Donc $n(n+1)(n+1)$ est divisible par 3

3ème cas : $n = 3k+2$

On a $n(n+1)(n+2) = (3k+2)(3k+3)(3k+4)$

$= 3(3k+2)(k+1)(3k+4) \ = 3h$

Avec $h = (3k+2)(k+1)(3k+4) \in \mathbb{N}$

Donc $n(n+1)(n+2)$ est divisible par 3 et par suite :

$\forall n \in \mathbb{N} \ \ n(n+1)(n+2)$ est divisible par 3

7 Raisonnement par récurrence

Montrer par récurrence

1 • $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 1+2+...+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

2 • $\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{3^{2n+1}+2^{n+2}}{7} \in \mathbb{N}$

Réponses :

1 • Pour $n = 1$

On a : $1 = \dfrac{1(1+1)}{2} = 1$ est vraie.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

Supposons par $1+2+...+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

et montrons que : $1+2+...+n+n+1 = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$

On a : $1+2+...+n+n+1 =$

$\dfrac{n(n+1)}{2}+n+1$

$= \dfrac{n(n+1)+2(n+1)}{2}$

$= \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$

Donc d'après le principe de récurrence on a $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$1+2+...+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

2 • Pour $n = 0$ on a : $\dfrac{3^1+2^2}{7} = 1 \in \mathbb{N}$

Soit $n \in \mathbb{N}$ supposons que $\dfrac{3^{2n+1}+2^{n+2}}{7} \in \mathbb{N}$ et montrons

Que $\dfrac{3^{2(n+1)+1}+2^{n+1+2}}{7} \in \mathbb{N}$

En effet : $\dfrac{3^{2n+1}+2^{n+2}}{7} \in \mathbb{N}$

Donc $\exists k \in \mathbb{N} / \dfrac{3^{2n+1}+2^{n+2}}{7} = k$

C'est à dire : $3^{2n+1}+2^{n+2} = 7k$

Et on a :

$3^{2(n+1)+1}+2^{n+1+2} =$

$= 3^{2n+1} \times 3^2 + 2^{n+2} \times 2$

$= 3^{2n+1} \times 9 + 2^{n+2} \times 2$

$= 3^{2n+1}(7+2) + 2^{n+2} \times 2$

$= 2^{2n+1} \times 7 + 3^{2n+1} \times 2 + 2^{n+2} \times 2$

$= 7 \times 3^{2n+1} + 2(3^{2n+1}+2^{n+2})$

$= 7 \times 3^{2x+1} + 2 \times 7k$

$= 7(3^{2n+1}+2k) = 7h$

Avec $h = 3^{2n+1}+2k \in \mathbb{N}$

Donc $\dfrac{3^{2(n+1)+1}+2^{n+1+2}}{7} \in \mathbb{N}$

Et par suite $\forall n \in \mathbb{N} \dfrac{3^{2n+1}+2^{n+2}}{7} \in \mathbb{N}$

8 Loi logique

Montrer par récurrence

1 • **Dresser** la table de vérité de p ou $q \Leftrightarrow \overline{p}$ et $\overline{q}$.

2 • En **déduire** que p ou $q \Leftrightarrow \overline{p}$ et $\overline{q}$ est une loi logique

Réponses :

1 •

p	q	$\overline{p}$	$\overline{q}$	p ou q	p ou q	$\overline{p}$ et $\overline{q}$	p ou q $\Leftrightarrow$ $\overline{p}$ et $\overline{q}$
v	v	F	F	v	F	F	v
v	F	F	v	v	F	F	v
F	v	v	F	v	F	F	v
F	F	v	v	F	v	v	v

2 • D'après la question 1) on peut remarquer que p ou q $\Leftrightarrow$ $\overline{p}$ et $\overline{q}$ est toujours vraie quelque soit les valeurs de vérité de p et de q.

donc p ou q $\Leftrightarrow$ $\overline{p}$ et $\overline{q}$ est une loi logique (c'est l'une des deux loi de Morgan).

Exercices d'application

1 Déterminer parmi les propositions suivantes lesquelles sont vraies

1 • 3 divise 234 ou 3 est premier

2 • 10 est un carré parfait ou $2 + 8 < 7$

3 • $121 = 11^2$ et tout les nombres pairs sont divisibles par 4

4 • $\forall x \in \mathbb{R} : (x \mp 1$ ou $x \mp 4)$

5 • $(\forall x \in \mathbb{R} \quad x \mp 1)$ ou $(\forall x \in \mathbb{R} \quad x \mp 4)$

6 • $(\exists x \in \mathbb{R} \quad x^2 - 1 = 0)$ et $(\exists x \in \mathbb{R} / x^2 = 16)$

7 • $(\exists x \in \mathbb{R} \ (x^2 - 1 = 0$ et $x^2 = 16)$

2 Les propositions suivantes sont elles vraies ou fausses

1 • $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) \quad x \geq y$

2 • $(\exists x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) \quad x \geq y$

3 • $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) \quad x \geq y$

4 • $(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) \quad x \geq y$

3 Nier chacune des propositions suivantes :

1 • $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad x \geq y$

2 • $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha \in]0,1[: \forall x \in \mathbb{R} \quad : |x| < \alpha \Rightarrow x^2 < \varepsilon$

3 • p et $(q$ ou $r)$

4 • p ou $(q$ ou $r)$

5 • $\exists x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad x + y > x^2$

4 Déterminer la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes

1 • Soit A une partie non vide de $\mathbb{N}$: $\exists p \in A / \forall n \in A \ n \geq p$

2 • $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N} : n^2 + n + 1 < \varepsilon$

3 • $\forall x \in \mathbb{R} \quad x > 6 \Rightarrow x > 2$

4 • $\forall a \in \mathbb{R} \quad a \geq 0$ ou $a \leq 0$

5 • $\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} : x \geq y$ ou $y \geq x$

6 • $\forall a > 0 \quad \forall b > 0 : \sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$

5 En utilisant la table de vérité montrer que chacune des propositions suivantes est une loi logique.

1 • Non (non $p) \Leftrightarrow p$

2 • Non $(p$ et $q) \Leftrightarrow$ (non p) ou (non q)

3 • Non $(p$ ou $q) \Longleftrightarrow$ (non p) et (non q)

4 • p et $q \Leftrightarrow q$ et p

5 • p ou $q \Longleftrightarrow q$ ou p

6 • p et $(q$ et $r) \Leftrightarrow (p$ et $q)$ et r

7 • $(pouq)$ ou $r \Leftrightarrow p$ ou $(q$ ou $r)$

6 Montrer que la proposition suivante n'est pas une loi logique (p et q) ou $r \Leftrightarrow p$ et (q ou r)

7 Montrer à l'aide d'un contre exemple que chacune des propositions suivantes est fausse

$p_1 : \forall n \in \mathbb{N}^* \quad n^2 + n + 3$ est premier

$P_2 : \forall x \in \mathbb{R} \quad : x^2 \geq x$

$P_3 : \forall x \in \mathbb{R} \quad : x^2 - 4x + 4 > 0$

$P_4 : \forall x \in \mathbb{R} \quad : -1 < \cos x < 1$

8 Soit a et b deux réels :

• Montrer que :

$a^2 + b^2 = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ et } b = 0$

9

1 • Montrer que : $\forall (x,y) \in (R^*{}_+)^2$

$y \mp -\frac{4}{5}x \Rightarrow \frac{x-y}{x+y} \mp 9$

2 • Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^* : x \mp 9 \Rightarrow \frac{x+9}{6} \mp \sqrt{x}$

3 • Montrer que : $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2 : a^2 + b^2 = 0 \Rightarrow a = 0$ et $b = 0$

4 • Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^+ : \forall y \in \mathbb{R}^* :$

$(x \mp 1)$ ou $(y \mp 1) \Rightarrow \frac{x+y}{2} \mp \sqrt{x} + \sqrt{y} - 1$

10 Monter par raisonnement de disjonction de cas que :

$\forall n \in \mathbb{N} \quad n(2n^2 + 1)$ est divisible par 3

11

1 • Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^{*+} : x + \frac{16}{x} \geq 8$

2 • Montrer que $\forall (\alpha, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \quad \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$

3 • Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R} \quad \frac{1}{4}x^2 + 1 \geq x$

12

1 • Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer que n est un multiple de 3 $\Longleftrightarrow n^2$ est un multiple de 3

2 • Montrer par absurde de que $\sqrt{3} \notin Q$

13 **Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes**

1 • $|2x-4|+|4x-12|=6$ **2 •** $|x-6|-|5x-10|=12$

14 **Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ montrer que :**
$x\neq y \Rightarrow (x-2)(y+2)\neq(x+2)(y-2)$

15 **Soient a et b deux réels strictement positifs.**

• **Montrer** que : $a\leq b \Rightarrow \frac{a^2+b^2}{a+b}\leq b$

16 **Montrer que $\forall x\in\mathbb{R}$**
$\sqrt{x^2+1}-x\geq 0$ (disjonction des cas)

17 **Soit $m\in\mathbb{R}$**

• Discuter suivant la valeur de m, les solutions de l'équation $x^2+1=m$

18

1 • Étudier le signe de $m^2-5m+4\,(m\in\mathbb{R})$

2 • En déduire suivant les valeurs de m le nombre de solutions de l'équation $x^2+4mx+20m-16=0$

19

1 • Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}$: $x^2+x+10>0$
et $x^2+3x+6>0$ et $x^2+2x+8>0$

2 • En **déduire** que : $(\forall x\in\mathbb{R})|x-2|<x^2+2x+8$

20

1 • Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $1^3+2^3+\ldots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$

2 • Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}$, $1+3+5+\ldots+(2n+1)=(n+1)^2$

21

1 • Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}$, $(12)^n-1$ est divisible par 11

2 • Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}$, 9^n+5^n-2 est divisible par 4

22

• **Montrer** que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$: $2^n\geq n$

23 **Soient f et g deux fonctions définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.**

Traduire en utilisant les quantificateurs convenables les expressions suivantes.

1 • f est nulle

2 • f est strictement croissante

3 • f est constante

4 • f est paire

5 • f est supérieur à g

24 **Soit $x\in\mathbb{R}$**

• **Montrer** que : $|x-2|<\frac{3}{2}\Rightarrow\frac{2}{11}<\frac{1}{x+2}<\frac{2}{5}$

Exercices d'approfondissement

25 **Soit $a\in\mathbb{R}$**

• **Montrer** que : $|a|\leq 1\Rightarrow \exists x\in\mathbb{R}: x^2+2x+a^2=0$

26 **Soit $n\in\mathbb{N}$**

• **Montrer** que n^2+3n+2 est un nombre pair

27 **Soit $a\in\mathbb{R}-\{1\}$**

• **Montrer** par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N}$:
$1+a+a^2+\ldots+a^n=\frac{a^{n+1}-1}{a-1}$

28 **Soit f une fonction définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et soient a et b deux réels montrer que : $f(a)=f(b)\Rightarrow a=b$**

• Est ce que la réciproque est vraie?

29 **Soient a et b deux réels montrer que : $a^2+b^2+1\geq 2ab-2a+2b$**

30

1 • Montrer que :
$\forall n\in\mathbb{N}$ $7^n+13^n+19^n-3$ est divisible par 6

2 • Montrer que :
$\forall n\in\mathbb{N}$, $1+4+4^2+\ldots+4^n=\frac{4^{n+1}-1}{3}$

31

1 • Soit $n\in\mathbb{N}^*$

• **Montrer** que : $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}\geq\frac{3n}{2n+1}$

2 • Soit $n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$

• **Montrer** que $3^n\geq 1+2n^2$

32 **Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes**

1 • $|x^2 - 7x + 12| = 6$

2 • $x^2 + 2|x - 2| - 4 = 0$

3 • $|x - 3| = 2x + 4$

33

1 • Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}\ \ \dfrac{x^2 + 4}{4} \geq |x|$

2 • Montrer que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$

$x \neq 4$ et $y \neq 4 \Rightarrow xy + 16 \neq 4x + 4y$

3 • Montrer que : $\forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$

34

1 • Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall y \in \mathbb{R}$

$x \neq 1$ ou $y \neq 1 \Rightarrow \dfrac{x^2 + y^2 + 2}{2} \neq x + y$

2 • Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}\ \ \forall y \in \mathbb{R}$

$|x| \neq |y| \Rightarrow \dfrac{x^4 + y^4}{2} \neq (xy)^2$

3 • Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}\ \ \forall y \in \mathbb{R}$

$|x + y| \leq |x| + |y|$ et $||x| - |y|| \leq |x - y|$

35

1 • Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$;

$1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

2 • En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$;

$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2$

36 **Soit** $n \in \mathbb{N}^*$

Posons $a_n = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n$

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$1 \times a_1 + 2 \times a_2 + \ldots + n \times a_n = a_{n+1} - 1$

37 **Soient a, b et c trois réels vérifiant:** $\begin{cases} a = 0 \Rightarrow b > 0 \\ a > 0 \Rightarrow b < 0 \\ b \neq 0 \Rightarrow c > 0 \end{cases}$

Déterminer le signe de ces réels sachant que l'un d'eux est strictement positif, le deuxième est strictement négatif et le dernier est nul.

38 **Montrer que :** $\forall e > 0$

$(\forall x \in \mathbb{R})|x - 1| < \alpha \Rightarrow |x^2 + 3x - 4| < \varepsilon$

Avec $\alpha = inf\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{2\varepsilon}{11}\right)$

39

1 • Soient p et q deux propositions, montrer que $[\overline{p\ ou\ q} \Longleftrightarrow \overline{p}\ et\ \overline{q}]$ est une loi logique.

2 • Donner la négation de la proposition suivante $[(\exists x \in \mathbb{R}) : x^2 + x - 1 < 0$ ou $x^2 - x + 1 < 0]$

3 • En déduire la valeur de vérité de la proposition donnée à la 2ème question.

40 **Soit $n \in \mathbb{N}$**

1 • Montrer par disjonction de cas que $n(n+1)$ est pair

2 • En **déduire** que : $(n^2 - 1)$ n'est pas divisible par $8 \Rightarrow n$ est pair

41 **Soient A et B deux parties non vide de $\mathbb{R}$**

on sait que : $\begin{cases} x \in A \cup B \Longleftrightarrow x \in A\ ou\ x \in B \\ x \in A \cap B \Longleftrightarrow x \in A\ et\ x \in B \end{cases}$

1 • Donner une proposition équivalente à $x \notin A \cup B$

2 • Donner une proposition équivalente à $x \notin A \cap B$

42

1 • Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$

$1 + 4 + 7 + \ldots + (1 + 3n) = \dfrac{(n+1)(3n+2)}{2}$

2 • Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$

$2 + 6 + 10 + \ldots + (4n + 2) = 2(n+1)^2$

43 **Soit** $b \in \mathbb{R}$

• **Montrer** que : $\forall \varepsilon > 0\ \ |b - 1| < \varepsilon \Rightarrow b = 1$

44 **Soit a un nombre réel $a > 1$.**

1 • Montrer par absurde que : $\forall n \in \mathbb{N}^*\ \ na \geq 1$

2 • Montrer par récurrence que :

$\forall n \in \mathbb{N}^*\ \ \forall n \in \mathbb{N}^* ; (a + 1)^n > n$

3 • En déduire que :

$\forall n \in \mathbb{N}^*$: $3^n + 4^n + \ldots 2022^n > 2020n$

45 **Recopier et compléter les pointillés par l'un des connecteurs logique suivants $\Rightarrow$, $\Leftarrow$ ou $\Leftrightarrow$.**

1 • $x \in \mathbb{R}$; $x^2 = 9 \ldots\ldots x = 3$

2 • $x \in \mathbb{R}^+$; $x^2 = 4 \ldots\ldots x = 2$

3 • $x \in \mathbb{R}$; $x \geq 1 \ldots\ldots x^2 \geq x$

4 • $x \in \mathbb{R}$; $|x| = 1 \ldots\ldots x = 1$

Cocher la ou les réponses justes :

	A	B	C
1 L'énoncé suivant : $\forall x \in \mathbb{R}\ \ x^2 - x + 4 > 0$ est :	Vrai ☐	Faux ☐	Ni vrai ni faux ☐
2 La négation de la proposition $\forall x \in \mathbb{R}$ $\exists y \in \mathbb{R}/y > x$ est :	$\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}/y \leq x$ ☐	$\exists x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\ y \leq x$ ☐	$C.\exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\ y \leq x$ ☐
3 Écrire en utilisant les quantificateurs la phrase suivante : tout entier non nul admet un autre entier plus grand que lui	$\exists n \in \mathbb{N}\ \forall p \in \mathbb{N}^*\ n > p$ ☐	$\forall p \mathbb{N}^*\ \exists n \in \mathbb{N}/n > p$ ☐	$\forall p \in N^*\ \forall n \in \mathbb{N}\ n > p$ ☐
4 Une proposition est :	Toujours fausse ☐	Toujours vraie ☐	Toujours ou bien vraie ou bien fausse ☐
5 La conjonction de deux propositions p et q est uniquement vraie si :	p est vraie ☐	q est vraie ☐	p et q sont vraies toutes les deux vraies à la fois ☐
6 L'implication $p \Rightarrow q$ est fausse si	p est fausse ☐	p et vraie et q est fausse ☐	q est vraie ☐

AUTO - FORMATION

46 **Soit n un nombre entier.**

1 • Soit $n \in \mathbb{N}$ montrer que : n est multiple de 5 $\Longleftrightarrow n^2$ est un multiple de 5/

2 • **Montrer** que $\sqrt{5} \notin Q$

47

Montrer que : $\overline{p\ et\ q} \Leftrightarrow \overline{p}\ ou\ \overline{q}$ est une loi logique.

Cette loi est appelée loi de Morgan.

48

Soient a et b deux réels distincts

1 • **Montrer** que : $a \neq b$

$a^3b^0 - a^2b + ab^2 + a^0b^3 = \dfrac{a^4 - b^4}{a - b}$

$\Rightarrow a^4b^0 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + a^0b^4 = \dfrac{a^5 - b^5}{a - b}$

2 • **Montrer** par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}\ \ (a \neq b)$

$a^nb^0 + a^{n-1}b + \dots + a^0b^n = \dfrac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b}$

49 **Soit n un nombre entier.**

1 • **Montrer** par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$

$1 + 2 + \dots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

$1 + 2 + 4 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$ et $2^n \geq n + 1$

2 • En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}\ \ 2^n > \dfrac{n(n+1)}{2}$

FICHE DE REMÉDIATION

Objectif **Remédier aux difficultés liées à :**
- Erreurs de raisonnement logique
- La mauvaise application du cours

Activités de remédiation aux difficultés	Remédiation	Critères et indicateurs
1 **Montrer** que la proposition suivante est vraie : $(P)\ \forall x \in \mathbb{R}$ $x^2+x+1>0$ **Réponse :** pour $x=1$ on a : $x^2+x+1=3>0$ donc la proposition est vraie.	$\Delta=-3<0$ donc x^2+x+1 a le même signe que $a=1>0$ donc $\forall x \in \mathbb{R}$ $x^2+x+1>0$	On donne un contre exemple pour montrer qu'une telle proposition est fausse
2 **Montrer** que $\forall x \in \mathbb{R}$ $x>1 \Rightarrow \dfrac{2x+1}{x+2}>1$ **Réponse :** $x>1 \Rightarrow \begin{cases} 2x>2 \\ x+2>3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+1>3 \\ x+2>3 \end{cases}$ $\Rightarrow \dfrac{2x+1}{x+2}>\dfrac{3}{3}=1$	$\dfrac{2x+1}{x+2}-1=\dfrac{x-1}{x+2}$ et comme $x>1$ on a alors $x-1>0$ et $x+2>3>0$ donc $\dfrac{x-1}{x+2}>0$ et par suite $\dfrac{2x+1}{x+2}>1$	L'élève a utilisé le fait que : $\begin{matrix} a>b>0 \\ c>d>0 \end{matrix} \Rightarrow \dfrac{a}{c}>\dfrac{b}{d}$ et cette implication n'est pas toujours vraie

Auto-remédiation

Voir corrigé p260

1 **Donner la valeur de vérité de l'expression suivante :** $A\ \ "\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq x"$

- Soient p et q deux propositions.

2 **Montrer** que : $(p\ et\ q) \Longleftrightarrow (q\ et\ p)$ est une loi logique.

3 **Donner** la valeur de vérité de l'expression suivante : $[2^2=5 \Rightarrow 1^2=0]$

4 **On rappelle** $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Démontrer que si a et b sont deux nombres relatifs alors $a+b\sqrt{2}=0 \Leftrightarrow a=b=0$

ARISTOTE

Évasion culturelle

Si faire de la logique consistait à raisonner correctement, il serait impossible de connaître le premier logicien ; mais il paraît plus satisfaisant d'admettre que la logique consiste à réfléchir sur le raisonnement, à énoncer des règles ou des lois régissant les activités déductives, à décrire, par exemple en les formalisant, les démarches du raisonnement. Nous pouvons alors sans risque d'erreur désigner Aristote (384^{-322} av. J.C.) [4] comme le fondateur de la logique ; il avait d'ailleurs conscience lui-même d'être un créateur, puisqu'on peut lire dans les Topiques : « Dans le cas de cette étude, il n'y avait pas une partie déjà élaborée, une autre non : il n'existait rien du tout». Aristote a principalement étudié le syllogisme, et son application à la démonstration ; un exemple de syllogisme, étudié dans les Premiers analytiques, situera les travaux d'Aristote : «si A est affirmé de tout B et B de tout C, nécessairement A est affirmé de tout C ».